Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables, 3

Gérald Tenenbaum, Jie Wu

Compositio Math. **144** (2008) 339–376.

Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables, 3

Gérald Tenenbaum & Jie Wu

Abstract. We consider logarithmic averages, over friable integers, of non-negative multiplicative functions. Under logarithmic, one-sided or two-sided hypotheses, we obtain sharp estimates that improve upon known results in the literature regarding both the quality of the error term and the range of validity. The one-sided hypotheses correspond to classical sieve assumptions. They are applied to provide an effective form of the Johnsen–Selberg prime power sieve.

AMS Subject classification. 11N25, 11N35, 11N36, 11N56, 11C08.

Keywords. Friable integers, Selberg's sieve, logarithmic averages of multiplicative functions.

Sommaire

1 Introduction 1
2 Historique 4
  2.1 Solutions d'équations différentielles aux différences 4
  2.2 Résultats antérieurs 5
3 Résultats 7
  3.1 Objectifs 7
  3.2 Énoncés 8
  3.3 Description sommaire d'une extension 12
4 Application au crible à puissances de Johnsen–Selberg 13
5 Estimations relatives aux nombres $f(p)$ 19
6 Majoration préliminaire 24
7 Équations fonctionnelles 25
  7.1 Forme initiale 25
  7.2 Exploitation de l'équation adjointe 27
8 Estimations initiales 29
9 Démonstration du Théorème 3.1 31
10 Démonstration du Théorème 3.2 35
11 Démonstration du Théorème 3.3 40
  11.1 Étude d'un cas particulier 40
  11.2 Extension au cas général 45

1. Introduction

Ce travail est le troisième volet d'une série consacrée à l'étude des valeurs moyennes de certaines fonctions arithmétiques sur les entiers friables.

Dans la première partie [19], nous avons essentiellement examiné le cas de fonctions multiplicatives $f(n)$ pour lesquelles les nombres $f(p)$ possèdent, lorsque p décrit la suite des nombres premiers, une valeur moyenne strictement positive. Dans la seconde [8], écrite en collaboration avec Guillaume Hanrot, nous avons exploré les conséquences de renseignements concernant directement la série de Dirichlet associée à f, supposée analytiquement proche d'un produit de fonctions zêtas de Dedekind — ce qui a permis de relâcher dans une certaine mesure l'hypothèse de multiplicativité.

Nous nous proposons à présent de considérer des moyennes de type logarithmique, *a priori* plus régulières, et partant susceptibles d'être contrôlées sous des hypothèses plus faibles concernant les nombres $f(p)$. Les moyennes de ce type sont importantes pour les applications, notamment dans les méthodes de crible : voir par exemple [7] et [4].

Désignons par $P(n)$ le plus grand facteur premier d'un entier naturel positif n, avec la convention $P(1) = 1$, et par $\mathbb{N}_y := \{n \in \mathbb{N}^* : P(n) \leqslant y\}$ l'ensemble des entiers y-friables. Pour tous $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$, nous posons

$$S(x,y) := \mathbb{N}_y \cap [1,x], \qquad S^*(x,y) := \mathbb{N}_y \cap]x,\infty[.$$

Soit f une fonction multiplicative. La série de Dirichlet de $f\mathbf{1}_{\mathbb{N}_y}$ s'écrit, dans son domaine de convergence,

$$F(s,y) := \sum_{n\in\mathbb{N}_y} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p\leqslant y}\sum_{\nu\geqslant 0} \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}}\cdot \tag{1·1}$$

Nous supposons systématiquement dans la suite que f est positive ou nulle et que $F(s,y)$ converge en $s = 1$ — et donc sur toute la droite verticale $\Re e\, s = 1$. La raréfaction à l'infini des entiers y-friables laisse alors augurer que la fonction sommatoire pondérée

$$\psi_f(x,y) := \sum_{n\in S(x,y)} \frac{f(n)}{n} \tag{1·2}$$

converge rapidement vers $F(1,y)$. Nous verrons que c'est effectivement le cas sous des hypothèses assez générales. Il est alors plus pertinent (et bien entendu plus délicat) d'évaluer le terme résiduel

$$\psi_f^*(x,y) := F(1,y) - \psi_f(x,y) = \sum_{n\in S^*(x,y)} \frac{f(n)}{n}\cdot \tag{1·3}$$

Notons $u := (\log x)/\log y$. Nos résultats principaux consistent, d'une part, à établir, sous une hypothèse de majoration unilatérale en moyenne des nombres $f(p)(\log p)/p$, une inégalité du type

$$\psi_f^*(x,y) \leqslant F(1,y)\lambda_\kappa(u)u^{Cu/\log y} \tag{1·4}$$

dans un très vaste domaine en (x,y), et, d'autre part, à montrer, sous une hypothèse d'estimation bilatérale en moyenne des mêmes quantités, une formule asymptotique du type

$$\psi_f^*(x,y) = F(1,y)\lambda_\kappa(u)\big\{1 + O(R)\big\} \tag{1·5}$$

où R est un terme d'erreur essentiellement comparable à $u(\log u)/\log y$. Ici, λ_κ désigne une fonction à décroissance très rapide, définie comme la solution d'une équation différentielle aux différences. Nous renvoyons le lecteur aux énoncés respectifs des Théorèmes 3.1 et 3.2 pour une formulation précise. Bornons-nous ici à deux remarques : d'une part, (1·4) est valable dans les hypothèses classiques du crible, d'autre part, l'estimation (1·5) établit l'optimalité de (1·4) dans l'intersection des domaines de validité.

Comme indiqué plus haut, le comportement asymptotique de la somme pondérée $\psi_f^*(x,y)$ est par nature plus régulier que celui de la somme non pondérée

$$\Psi_f(x,y) := \sum_{n \in S(x,y)} f(n).$$

Un aspect remarquable de ce phénomène concerne, ainsi qu'il a été souligné dans [8], le terme d'erreur en $1/(\log y)^\kappa$ dans la formule

$$\Psi_f(x,y) = C_\kappa(f) x (\log y)^{\kappa-1} \biggl\{ 1 + O\biggl(\frac{1}{(\log y)^\kappa} + \frac{\log(u+1)}{\log y} \biggr) \biggr\},$$

établie dans [19], pour un domaine adéquat en (x,y).[1] Lorsque $f(p)$ est en moyenne proche de κ, ce terme résiduel n'est en fait nécessaire que lorsque x/y est relativement petit et, partant, comme nous le verrons plus loin, ne contribue pas, lorsque $\kappa < 1$, à un terme d'erreur spécifique dans la formule asymptotique correspondante pour $\psi_f^*(x,y)$.

La suite de cet article est organisée comme suit. Le paragraphe 2 contient les prérequis, relatifs aux solutions d'équations différentielles aux différences, nécessaires à l'énoncé de nos résultats, ainsi qu'une brève présentation des estimations de $\psi_f^*(x,y)$ antérieurement disponibles dans la littérature. Le paragraphe 3 est dévolu à la formulation précise de nos énoncés ainsi qu'à la description d'une extension possible. Nous y décrivons également l'incidence sur les évaluations de $\psi_f^*(x,y)$ de la connaissance d'hypothèses plus fortes, mais standard, relatives aux moyennes non pondérées des nombres $f(p)\log p$. Le paragraphe 4 concerne l'application des résultats d'hypothèses unilatérales au crible à puissances de Gallagher–Selberg. Nous donnons un énoncé général et détaillons un exemple pratique représentatif. Les paragraphes suivants sont consacrés aux démonstrations. En particulier, les équations fonctionnelles, qui forment le cœur de la méthode, et leur traitement via l'équation dite adjointe au problème, sont présentés au paragraphe 7.

1. La constante $C_\kappa(f)$ est précisément définie à la formule (5·9) *infra*.

2. Historique

2·1. Solutions d'équations différentielles aux différences

L'énoncé des résultats de la bibliographie nécessite quelques brefs rappels relatifs à certaines fonctions de la théorie du crible définies comme solutions d'équations différentielles aux différences.

Nous désignons par ϱ_κ la solution continue du système

$$\begin{cases} \varrho_\kappa(u) = u^{\kappa-1}/\Gamma(\kappa) & \text{si } 0 < u \leqslant 1, \\ u\varrho_\kappa'(u) + (1-\kappa)\varrho_\kappa(u) + \kappa\varrho_\kappa(u-1) = 0 & \text{si } u > 1, \end{cases} \tag{2·1}$$

où Γ désigne la fonction d'Euler. Ainsi, ϱ_κ est, pour tout $\kappa > 0$, la puissance de convolution fractionnaire de la fonction de Dickman $\varrho := \varrho_1$. Pour chaque κ, la fonction ϱ_κ hérite de la propriété de décroissance rapide de ϱ. On a par exemple

$$\varrho_\kappa(u) = (u\log u)^{-u}\mathrm{e}^{O_\kappa(u)} \qquad (u \to \infty).$$

Plus précisément, désignons par $\xi(u)$ l'unique solution réelle non nulle de $\mathrm{e}^\xi = 1 + u\xi$ si $u > 0$, $u \neq 1$ et posons $\xi(1) = \xi(0) = 0$. Définissons alors

$$\begin{aligned} \xi_\kappa(u) &:= \max\{1, \xi(u/\kappa)\}, \\ I(s) &:= \int_0^s \frac{\mathrm{e}^v - 1}{v}\,\mathrm{d}v, \\ \sigma_j(u) &:= \kappa I^{(j)}(\xi_\kappa(u)), \end{aligned} \tag{2·2}$$

de sorte que, d'après le lemme III.5.8.1 de [17] et le lemme 4.5 de [14],

$$\left.\begin{aligned} \xi_\kappa(u) &= \log u + \log_2 u + O\left(\frac{\log_2 u}{\log u}\right) \\ \sigma_j(u) &= u\left\{1 + O\left(\frac{1}{\log u}\right)\right\} \end{aligned}\right. \qquad (u \to \infty), \tag{2·3}$$

où, ici et dans la suite, $\log_k$ désigne la k-ième itérée de la fonction logarithme. Il résulte alors du théorème 1 de [14] ou du plus général théorème 2 de [9] que l'on a

$$\varrho_\kappa(u) = \left\{1 + O\left(\frac{1}{u}\right)\right\}\frac{\mathrm{e}^{\gamma\kappa - u\xi_\kappa(u) + \sigma_0(u)}}{\sqrt{2\pi\sigma_2(u)}} \qquad (u \to \infty), \tag{2·4}$$

où γ est la constante d'Euler.

Nous posons encore

$$\lambda_\kappa(u) := \mathrm{e}^{-\gamma\kappa}\int_u^\infty \varrho_\kappa(v)\,\mathrm{d}v, \quad j_\kappa(u) = 1 - \lambda_\kappa(u) \qquad (u \geqslant 0), \tag{2·5}$$

de sorte que $\lambda_\kappa(0) = j_\kappa(\infty) = 1$ — voir par exemple [6]. Ainsi qu'il a été noté dans [8] — formule (4.12) —, nous avons

$$\lambda_\kappa(u) = \left\{1 + O\left(\frac{1}{u}\right)\right\}\frac{\mathrm{e}^{-\gamma\kappa}\varrho_\kappa(u)}{\xi_\kappa(u)} \qquad (u > 0). \tag{2·6}$$

Nous observons immédiatement, à fins de référence ultérieure, que cela implique, grâce par exemple aux estimations de [14],

$$\lambda_\kappa(u - v) \ll \lambda_\kappa(u)\mathrm{e}^{v\xi_\kappa(u)} \qquad (u \geqslant 1,\ 0 \leqslant v \leqslant u - \tfrac12). \tag{2·7}$$

2·2. Résultats antérieurs

Pour $C > 0$, $\delta > 0$, $\kappa > 0$, désignons par $\mathcal{M}(C, \delta, \kappa)$ la classe des fonctions multiplicatives réelles positives ou nulles f satisfaisant aux conditions

$$\Big|\sum_{p\leqslant z} f(p)\frac{\log p}{p} - \kappa \log z\Big| \leqslant C(\log z)^{1-\delta} \qquad (z \geqslant 2), \tag{2·8}$$

$$\sum_{p}\sum_{\nu\geqslant 2} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu}\log p^\nu \leqslant C. \tag{2·9}$$

Sous l'hypothèse supplémentaire $0 < \delta < 1$, Song [15] a montré que l'on a

$$\psi_f^*(x, y) = F(1, y)\bigg\{\lambda_\kappa(u) + O\bigg(\frac{\log(u+1)}{(\log y)^\delta}\bigg)\bigg\} \tag{2·10}$$

uniformément pour $f \in \mathcal{M}(C, \delta, \kappa)$, $x \geqslant y \geqslant 2$, où, ici et dans la suite, nous notons systématiquement

$$u := \frac{\log x}{\log y} \quad (x \geqslant 1,\ y > 1), \tag{2·11}$$

La formule (2·10) peut être considérée comme une version quantitative d'un résultat dû à de Bruijn & van Lint [1] établissant, sous certaines hypothèses de même nature mais plus faibles, une conclusion de la forme

$$\psi_f(x, y) \sim (\log y)^\kappa \mathfrak{L}(\log y) \qquad (y \to \infty)$$

uniformément en u sur tout compact de $]0, \infty[$, où $\mathfrak{L}$ est une fonction à croissance lente au sens de Karamata.

En raison de la majoration triviale

$$\psi_f^*(x, y) \leqslant F(1, y), \tag{2·12}$$

la formule (2·10) est sans intérêt hors du domaine $1 \leqslant u \leqslant \exp\big\{c(\log y)^\delta\big\}$ où c est une constante positive arbitraire. Il n'est donc pas anecdotique de supprimer le facteur $\log(u + 1)$ dans le terme d'erreur. C'est l'un des objets du résultat de Tenenbaum dans [18], qui fournit ainsi une évaluation non triviale pour toute valeur de x et y, bien que de moindre qualité pour les grandes valeurs de u. Le même travail contient également une extension au cas de fonctions à valeurs complexes, sous une hypothèse plus forte concernant les moyennes des nombres $f(p)$.

Une étude récente due à Greaves [5] concerne essentiellement le cas $\delta = 1$, assujetti à certaines restrictions supplémentaires. Plus précisément, étant données deux constantes $A > 0$, $\kappa > 0$, et notant

$$r_f(z) := \sum_{p\leqslant z} f(p)\frac{\log p}{p} - \kappa \log z \qquad (z \geqslant 1), \tag{2·13}$$

pour chaque fonction multiplicative positive ou nulle f, Greaves place son étude dans les hypothèses

$$r_f(z) - r_f(w) \leqslant A \qquad (z \geqslant w \geqslant 1), \tag{2·14}$$

$$f(p^\nu) = 0 \qquad (p \geqslant 2,\ \nu \geqslant 2). \tag{2·15}$$

Pour toute constante $B \geqslant 1$ telle que

$$\frac{1}{\log z}\sum_{p\leqslant z}\frac{f(p)\log p}{p+f(p)} \leqslant B \qquad (z \geqslant 2),^{(2)}$$

il introduit alors

$$h_B(u) := \begin{cases} u\log(u/B) - u + B, & \text{si } u > B,\\ 0, & \text{dans le cas contraire.}\end{cases}$$

Avec ces notations, les résultats principaux de [5] peuvent être énoncés comme suit.

Théorème A ([5], th. 1**).** *Soient A et κ deux nombres réels positifs. Il existe une constante c_κ, ne dépendant que de κ, telle que, pour toute fonction multiplicative positive ou nulle f vérifiant* (2·14) *et* (2·15)*, on ait*

$$\psi_f^*(x,y) \leqslant F(1,y)\left(\lambda_\kappa(u) + \frac{\mathrm{e}^{c_\kappa A - h_B(u)}}{\log y}\right) \qquad (x \geqslant y \geqslant 2). \tag{2·16}$$

Théorème B ([5], th. 2**).** *Soient A et κ deux nombres réels positifs. Il existe une constante c_κ, ne dépendant que de κ, telle que, pour toute fonction multiplicative positive ou nulle f vérifiant* (2·15) *et*

$$|r_f(z)| \leqslant \tfrac{1}{2}A \qquad (z \geqslant 1), \tag{2·17}$$

$$\sum_p \frac{f(p)^2\log p}{p^2} \leqslant A, \tag{2·18}$$

on ait

$$\psi_f^*(x,y) = F(1,y)\left\{\lambda_\kappa(u) + O\left(\frac{u\,\mathrm{e}^{c_\kappa A - h_B(u)}}{\log y}\right)\right\} \qquad (x \geqslant y \geqslant 2). \tag{2·19}$$

La constante implicite ne dépend que de κ.

Remarques. (i) Il résulte de (2·4) et (2·6) que la minoration contenue dans la formule asymptotique (2·19) n'est non triviale que si

$$u \ll (\log_2 y)/\log_4 y, \quad \text{i.e.} \quad y > x^{c(\log_4 x)/\log_2 x}. \tag{2·20}$$

Dans ce même domaine restreint, (2·16) fournit donc une majoration asymptotiquement optimale de $\psi_f^*(x,y)$.

2. Il résulte de (2·14) que $B = A + \kappa$ est un choix admissible.

(ii) Comme l'hypothèse (2·15) implique que $\psi_f^*(x,y)=0$ pour

$$x > N_y := \prod_{p\leqslant y} p = \mathrm{e}^{y+o(y)}, \tag{2·21}$$

l'inégalité (2·16) et la majoration contenue dans (2·19) sont triviales dès que $x > N_y$.

(iii) Les lemmes 1 et 2 de Rawsthorne [12], permettent de déduire immédiatement du Théorème B une assertion de même type que le Théorème A, mais légèrement plus faible, à savoir que l'on a, sous les mêmes hypothèses,

$$\psi_f^*(x,y) \leqslant F(1,y)\bigg(\lambda_\kappa(u) + \frac{u\,\mathrm{e}^{A_1-h_B(u)}}{\log y}\bigg) \qquad (x\geqslant y\geqslant 2), \tag{2·22}$$

où A_1 dépend au plus de A et κ.

3. Résultats

3·1. Objectifs

Au vu des estimations décrites plus haut, il est naturel d'examiner, sous l'hypothèse naturelle $r_f(z) \ll 1$, les possibilités d'extension du domaine de validité de la formule asymptotique

$$\psi_f^*(x,y) \sim F(1,y)\lambda_\kappa(u)$$

et, sous une hypothèse unilatérale comme (2·14), de celles de la majoration asymptotique correspondante

$$\psi_f^*(x,y) \leqslant \{1+o(1)\}F(1,y)\lambda_\kappa(u). \tag{3·1}$$

En effet, la décroissance rapide de $\lambda_\kappa(u)$ à l'infini complique singulièrement l'obtention d'un terme d'erreur relatif de bonne qualité : on notera, par exemple, que la formule (2·19) peut être essentiellement réécrite sous la forme

$$\psi_f^*(x,y) = F(1,y)\lambda_\kappa(u)\bigg\{1 + O\bigg(\frac{\mathrm{e}^{u\log_2 u+O(u)}}{\log y}\bigg)\bigg\}. \tag{3·2}$$

Notre méthode étant relativement flexible, les hypothèses concernant $r_f(z)$ peuvent être notablement relâchées. Nous précisons sans démonstration au paragraphe 3.3 les résultats qui peuvent être obtenus sous l'hypothèse plus faible (2·8) ou sous une hypothèse unilatérale de même type.

Une seconde motivation de ce travail réside dans une clarification de la nature même des hypothèses nécessaires concernant la fonction multiplicative f.

Alors qu'il apparaît indispensable, en vue d'élargir le champ des applications, de s'affranchir de la condition (2·15), qui restreint le support de f aux entiers sans facteur carré, il est opportun de distinguer et d'établir deux types de théorèmes, selon que les hypothèses portent sur une condition faible, comme (2·14) ou (2·17), relative aux nombres $f(p)(\log p)/p$ ou sur une condition forte — voir (3·11) *infra* — concernant le comportement en moyenne de $f(p)\log p$. Les énoncés de la première catégorie fourniront des estimations valables dans un domaine restreint en (x,y) mais applicables à une vaste catégorie de fonctions f, ceux du second, au contraire, concerneront des évaluations plus précises, valables sous des conditions plus restrictives pour le choix de f.

3·2. Énoncés

Étant donnés des paramètres $A>0$, $C>0$, $\kappa>0$ et $\eta\in\,]0,\frac12[$, nous introduisons la classe $\mathfrak{M}_\kappa(A,C,\eta)$ — resp. $\mathfrak{L}_\kappa(A,C,\eta)$ — des fonctions multiplicatives réelles positives ou nulles f satisfaisant, avec la notation (2·13), aux conditions (2·17) — resp. (2·14) — et

$$\sum_p\sum_{\nu\geqslant 2}\frac{f(p^\nu)}{p^{(1-\eta)\nu}}\leqslant C. \tag{3·3}$$

Nous avons

$$\mathfrak{M}_\kappa(A,C,\eta)\subset\mathfrak{L}_\kappa(A,C,\eta). \tag{3·4}$$

Nous établissons le résultat suivant.

Théorème 3.1. *Soient $A>0$, $C>0$, $\kappa>0$ et $\eta\in\,]0,\frac12[$. Pour une constante convenable $B>0$, nous avons*

$$\psi_f^*(x,y)\leqslant F(1,y)\lambda_\kappa(u)\mathrm{e}^{Bu\xi_\kappa(u)/\log y} \tag{3·5}$$

sous la condition

$$f\in\mathfrak{L}_\kappa(A,C,\eta),\quad x\geqslant 3,\quad (\log x)^{3/\eta}\leqslant y\leqslant x. \tag{3·6}$$

En particulier, pour tout $c>0$ fixé, nous avons

$$\psi_f^*(x,y)\leqslant F(1,y)\lambda_\kappa(u)\bigg\{1+O\bigg(\frac{u\log(u+1)}{\log y}\bigg)\bigg\} \tag{3·7}$$

uniformément pour

$$f\in\mathfrak{L}_\kappa(A,C,\eta),\quad x\geqslant 3,\qquad \exp\Big\{c\sqrt{\log x\log_2 x}\Big\}\leqslant y\leqslant x.$$

Sous l'hypothèse supplémentaire (2·15), *l'inégalité* (3·5) *est valable pour* $x\geqslant 2$, $y\geqslant 2$.

Le Théorème 3.1 apporte en particulier les précisions suivantes sur le Théorème A :

(i) Dans le sous-domaine (3·6), l'hypothèse contraignante (2·15) peut être remplacée par l'inoffensive condition (3·3) tout en réduisant significativement le majorant.

(ii) Sous l'hypothèse (2·15), le facteur exponentiel du membre de droite de (3·5) peut toujours être remplacé par $1+\mathrm{e}^{O(u)}/\log y$: en effet, comme $\psi_f^*(x,y)=0$ sous la condition (2·21), nous pouvons sans perte de généralité supposer que $\xi_\kappa(u)\ll\log y$. Cela représente un renforcement conséquent de (2·16).

(iii) Le domaine de validité (2·20) pour une inégalité asymptotiquement optimale de type (3·1) a été étendu à

$$u=o\Big(\frac{\log y}{\log_2 y}\Big)\qquad(y\to\infty).$$

Introduisons la notation

$$Z_j(y;f):=1+\sum_{p\leqslant y}\frac{f(p)^2(\log p)^j}{p^2}\qquad(j=1,\,2).\tag{3·8}$$

Il résulte par exemple de (5·2) et (5·6) *infra* que, sous la condition (2·14), on a

$$Z_1(y;f)\ll\log_2 y,\quad Z_2(y;f)\ll\log y,$$

alors que

$$Z_1(y;f)+Z_2(y;f)\ll 1,$$

si, par exemple, $f(p)\ll p/(\log p)^{2+\varepsilon}$ avec $\varepsilon>0$.

Sous l'hypothèse bilatérale (2·17), nous obtenons une formule asymptotique pour $\psi_f^*(x,y)$.

Théorème 3.2. *Soient $A>0$, $C>0$, $\kappa>0$ et $\eta\in]0,\frac12[$. Il existe une constante positive $c_1=c_1(A,C,\kappa,\eta)$ telle que l'on ait*

$$\psi_f^*(x,y)=F(1,y)\lambda_\kappa(u)\big\{1+O\big(E_{x,y}\big)\big\}\tag{3·9}$$

uniformément pour

$$f\in\mathfrak{M}_\kappa(A,C,\eta),\quad x\geqslant 3,\quad \exp\Big\{c_1\sqrt{(\log x)\log_2 x}\Big\}\leqslant y\leqslant x,\tag{3·10}$$

où l'on a posé

$$E_{x,y}:=\min\left(1,\frac{Z_1(y;f)}{\log y}+\frac{u\log(u+1)}{\log y}\Big\{1+u\log\Big(1+\frac{Z_2(y;f)\log(u+1)}{\log y}\Big)\Big\}\right).$$

Le Théorème 3.2 répond aux objectifs précédemment décrits en renforçant le Théorème B dans quatre directions :

(i) La relation (3·9) fournit un équivalent asymptotique lorsque

$$x \geqslant 3, \quad \exp\Big\{w(x)(\log x)^{2/3}(\log_2 x \log_3 x)^{1/3}\Big\} \leqslant y \leqslant x$$

où $w(x)$ est une fonction arbitraire tendant vers l'infini. De plus, ce domaine peut être étendu à

$$x \geqslant 3, \quad \exp\Big\{w(x)\sqrt{(\log x)\log_2 x}\Big\} \leqslant y \leqslant x$$

dès que $Z_2(y; f) \ll 1$, ce qui représente une hypothèse très peu contraignante pour les applications. Dans tous les cas, le domaine (2·20) a été significativement agrandi : la borne supérieure autorisée pour u est passée de $\ll (\log_2 y)/\log_4 y$ à une puissance de $\log y$.

(ii) Le terme d'erreur de (3·9) est au plus quadratique en $u \log u$, alors qu'il croît exponentiellement en $u \log_2 u$ dans celui de (3·2).

(iii) L'hypothèse (3·3), modérant la croissance des nombres $f(p^\nu)$ pour $\nu \geqslant 2$, remplace à présent la drastique condition (2·15).

(iv) L'hypothèse (2·18), relative aux moyennes pondérées des nombres $f(p)^2$, a été supprimée. Cependant, par le biais d'une majoration de $Z_2(y; f)$, toute information quantitative de ce type permet de préciser le résultat obtenu.

D'un point de vue méthodologique, il est intéressant de noter qu'on ne peut faire appel aux résultats de Rawsthorne dans [12] pour déduire du Théorème 3.2 même une version affaiblie du Théorème 3.1. En effet, le principe mis en œuvre dans [12], consistant essentiellement à réduire le cas $f \in \mathfrak{L}_\kappa(A, C, \eta)$ au cas $f \in \mathfrak{M}_\kappa(A, C, \eta)$ grâce au calcul des variations, ne fonctionne, en l'état actuel des connaissances, que sous l'hypothèse (2·15).

Nos démonstrations des Théorèmes 3.1 et 3.2 reposent sur la méthode itérative mise en œuvre dans [18]. Nous traitons directement $\psi_f^*(x, y)$ sans préalablement approcher f par une fonction de Piltz τ_κ, mais cette modification technique n'est pas essentielle. En revanche, nous utilisons de manière cruciale une majoration initiale précise obtenue par la méthode de Rankin avec un choix essentiellement optimal des paramètres.

Ainsi qu'il a été mentionné au paragraphe 3.1, il peut être utile de disposer d'évaluations de $\psi_f^*(x, y)$ sous des hypothèses plus fortes concernant les valeurs moyennes des nombres $f(p)$. Dans cette perspective, la méthode de [19] est directement applicable. Au prix de quelques modifications mineures, nous obtenons le résultat suivant, pour l'énoncé duquel nous rappelons à présent certaines notations.

Par souci de concision, nous renvoyons librement à [19].

Pour $\kappa > 0$ et $b \in]0, \frac{1}{2}]$, nous désignons par $\mathcal{R}(b, \kappa)$ la classe des fonctions croissantes $R \in \mathcal{C}^1(]1, \infty[, \mathbb{R}^{+*})$ introduite dans [19] — page 124. Pour la commodité du lecteur, rappelons que la plupart des fonctions « naturelles » $R(v)$ dont la vitesse de croissance est située entre celles de $(\log_2 v)^{1+\varepsilon}$ et $\exp\{(\log v)^{3/5-\varepsilon}\}$, où $\varepsilon > 0$ est arbitraire, appartiennent à $\mathcal{R}(b, \kappa)$.

Étant donnés des paramètres $A>0$, $C>0$, $\kappa>0$, $b\in\,]0,\frac12]$, $\eta\in\,]0,\frac12[$, et une fonction $R\in\mathcal{R}(b,\kappa)$, nous définissons, comme dans [19], la classe

$$\mathcal{M}_\kappa=\mathcal{M}_\kappa(A,C,\eta;R)$$

des fonctions multiplicatives réelles positives ou nulles f satisfaisant à (3·3) et

$$\Big|\sum_{p\leqslant z}f(p)\log p-\kappa z\Big|\leqslant Az/R(z)\qquad(z>1). \tag{3·11}$$

Notons toutefois, que, pour la cohérence des définitions de $\mathcal{M}_\kappa(A,C,\eta;R)$ et $\mathfrak{M}_\kappa(A,C,\eta)$, nous avons permuté les rôles joués par les constantes A et C dans la définition de $\mathcal{M}_\kappa(A,C,\eta;R)$.

Pour tous $b\in\,]0,\frac12]$, $\varepsilon>0$, $\kappa>0$ et $R\in\mathcal{R}(b;\kappa)$, nous posons

$$U^*(y):=R\big(y^b\big)/\big\{1+\big|\log R\big(y^b\big)\big|\big\}\qquad\text{et}\qquad Y_\varepsilon^*:=y^{U^*(y)/\varepsilon}, \tag{3·12}$$

et introduisons le domaine $J_\varepsilon^*(R)$ du plan en x, y, défini par la condition

$$2\leqslant y\leqslant x\leqslant Y_\varepsilon^*. \tag{$J_\varepsilon^*(R)$}$$

Théorème 3.3. *Soient $A>0$, $C>0$, $\varepsilon>0$, $\kappa>0$, $b\in\,]0,\frac12]$, $\eta\in\,]0,\frac12]$, $R\in\mathcal{R}(b;\kappa)$. On a*

$$\psi_f^*(x,y)=F(1,y)\lambda_\kappa(u)\{1+O(\mathcal{E}_{x,y})\} \tag{3·13}$$

uniformément pour $f\in\mathcal{M}_\kappa(A,C,\eta;R)$ et $2\leqslant y\leqslant x\leqslant Y_\varepsilon^*$, où l'on a posé

$$\mathcal{E}_{x,y}=\frac{u\log(u+1)}{R(y^{b/2})}+\frac{\log(u+1)}{\log y}\int_2^y\frac{\mathrm{d}t}{tR(t^b)}+\frac{\{u\log(u+1)\}^2}{R(y^b)\log y}.$$

Pour illustrer les champs d'application spécifiques des Théorèmes 3.2 et 3.3, considérons trois exemples.

(i) Lorsque $R(z)=\exp\{(\log z)^{(3-\varepsilon)/5}\}$ avec $0<\varepsilon<\frac12$, la formule asymptotique (3·13) a lieu uniformément pour

$$x\geqslant 3,\quad \exp\big\{(\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}\big\}\leqslant y\leqslant x \tag{H_ε}$$

et l'on peut choisir

$$\mathcal{E}_{x,y}:=\frac{\log(u+1)}{\log y}.$$

Nous obtenons ainsi un renforcement considérable de (3·9) sous une hypothèse beaucoup plus restrictive.

(ii) Lorsque $R(z) = (\log z)^\delta$ avec $\delta > 0$, il existe une constante $c > 0$ telle que la formule asymptotique (3·13) ait lieu uniformément pour

$$x \geqslant 3, \qquad \exp\left\{(\log x \log_2 x)^{1/D}\right\} \leqslant y \leqslant x \tag{3·14}$$

avec $D := \min\{1+\delta, \frac{1}{2}(3+\delta)\}$ et

$$\mathcal{E}_{x,y} = \begin{cases} \dfrac{u\log(u+1)}{(\log y)^\delta} & \text{si } \delta < 1, \\ \dfrac{(u+\log_2 y)\log(u+1)}{\log y} & \text{si } \delta = 1, \\ \dfrac{\{u\log(u+1)\}^2}{(\log y)^{1+\delta}} & \text{si } \delta > 1. \end{cases}$$

Notons que l'hypothèse (3·11) implique, avec la notation (2·13),

$$r_f(z) \ll \begin{cases} (\log z)^{1-\delta} & \text{si } \delta < 1, \\ \log_2 z & \text{si } \delta = 1, \\ 1 & \text{si } \delta > 1. \end{cases}$$

Ainsi, lorsque $\delta > 1$, le Théorème 3.3 fournit-il en toute circonstance, moyennant une hypothèse légèrement plus forte, un terme d'erreur relatif sensiblement plus petit que celui du Théorème 3.2.

(iii) Choisissons à présent $R(z) := (\log z)(\log_2 z)^{1+c}$, avec $c > 0$, de manière à approcher encore davantage l'hypothèse $r_f(z) \ll 1$ par une condition de type (3·11). Nous obtenons alors la validité de (3·13) dans le domaine

$$x \geqslant 3, \qquad \exp\left\{(\log x)^{1/2}(\log_2 x)^{-c/2}\right\} \leqslant y \leqslant x$$

avec

$$\mathcal{E}_{x,y} := \frac{\log(u+1)}{\log y} + \frac{u\log(u+1)}{(\log y)(\log_2 y)^{1+c}}\left\{1 + \frac{u\log(u+1)}{\log y}\right\}.$$

Cela met en évidence une cohérence opportune entre les Théorèmes 3.3 et 3.2. Il est en effet à noter que notre hypothèse sur les nombres $f(p)$ implique à présent $Z_2(y; f) \ll 1$.

3·3. Description sommaire d'une extension

Si, dans les applications usuelles, l'on est effectivement amené à comparer la fonction $r_f(z)$ à une constante, notre méthode s'adapte sans difficulté à d'autres types d'hypothèses. Dans cette perspective, une étude exhaustive, parallèle à celle effectuée dans [19] pour le cas des moyennes standard, pourrait être envisagée. Les majorants des quantités $r_f(z)$ ou $r_f(z) - r_f(w)$ seraient alors susceptibles de varier dans une classe de fonctions relativement large, définie par des conditions de croissance peu restrictives. Nous nous contentons ici de décrire brièvement les résultats obtenus dans le cas de majorants de type (2·8).

Introduisons donc, pour chaque valeur du paramètre δ dans $]0,1]$, la sur-classe $\mathfrak{L}_\kappa(A,C,\delta,\eta)$ de $\mathfrak{L}_\kappa(A,C,\eta)$ obtenue en affaiblissant la condition (2·14) en

$$r_f(z)-r_f(w)\leqslant A(\log z)^{1-\delta}\qquad(z\geqslant w\geqslant 1)\tag{3·15}$$

et la sur-classe $\mathfrak{M}_\kappa(A,C,\delta,\eta)$ de $\mathfrak{M}_\kappa(A,C,\eta)$ définie en remplaçant (2·17) par

$$|r_f(z)|\leqslant \tfrac12 A(\log z)^{1-\delta}\qquad(z\geqslant 1).\tag{3·16}$$

Nous obtenons alors que, pour tous $A>0$, $C>0$, $\delta\in]0,1]$, $\kappa>0$ et $\eta\in]0,\frac12[$, la majoration

$$\psi_f^*(x,y)\leqslant F(1,y)\lambda_\kappa(u)\mathrm{e}^{Bu\xi_\kappa(u)/(\log y)^\delta}\tag{3·17}$$

est valable, avec une constante convenable $B>0$, sous la condition

$$f\in\mathfrak{L}_\kappa(A,C,\delta,\eta),\quad x\geqslant 3,\quad (\log x)^{3/\eta}\leqslant y\leqslant x.\tag{3·18}$$

Semblablement, nous pouvons établir, pour tous A,C,δ,κ,η fixés comme indiqué plus haut, l'existence d'une constante c_1 telle que l'on ait

$$\psi_f^*(x,y)=F(1,y)\lambda_\kappa(u)\big\{1+O\big(E_{x,y}^*\big)\big\}\tag{3·19}$$

uniformément pour

$$f\in\mathfrak{M}_\kappa(A,C,\delta,\eta),\quad x\geqslant 3,\quad \exp\big\{c_1(\log x\log_2 x)^{1/(1+\delta)}\big\}\leqslant y\leqslant x,\tag{3·20}$$

où l'on a posé

$$E_{x,y}^*:=\min\left(1,\frac{Z_1(y;f)}{\log y}+\frac{u\log(u+1)}{(\log y)^\delta}\left\{1+u\log\left(1+\frac{Z_2(y;f)\log(u+1)}{(\log y)^{2-\delta}}\right)\right\}\right).$$

4. Application au crible à puissances de Johnsen–Selberg

Pour chaque puissance de nombre premier p^ν ($\nu\geqslant 1$), soit $\mathcal{W}(p^\nu)$ un ensemble de résidus modulo p^ν, identifié à la classe de ses représentants dans $\mathbb{Z}$. Supposons que $\mathcal{W}(p^\mu)\cap\mathcal{W}(p^\nu)=\varnothing$ si $\mu\neq\nu$. Posons alors

$$\mathcal{W}(d):=\bigcap_{p^\nu\|d}\mathcal{W}(p^\nu),\tag{4·1}$$

de sorte que $n\in\mathcal{W}(d)$ si, et seulement si, $n\in\mathcal{W}(p^\nu)$ dès que $p^\nu\|d$. Convenons également de poser $\mathcal{W}(1)=\mathbb{Z}$.

Soient $\mathcal{A}$ une suite finie d'entiers (non nécessairement distincts), $\mathcal{P}$ un ensemble de nombres premiers et $z \geqslant 2$ un nombre réel. Posons

$$\mathcal{P}_z := \mathcal{P} \cap [1, z].$$

Nous cherchons une majoration de la quantité

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}; z) := \big|\big\{a \in \mathcal{A} : a \notin \mathcal{W}(p^\nu) \ \ (p \in \mathcal{P}_z,\, \nu \geqslant 1)\big\}\big|.$$

Le cas particulier où $\mathcal{A}$ est un intervalle a été initialement considéré par Johnsen [10] sous des hypothèses sensiblement plus restrictives que celles que nous avons effectuées plus haut. Celles-ci apparaissent dans le travail [13], où Selberg étend sa méthode au crible par des puissances de nombres premiers. Gallagher [2], [3], a fourni une preuve plus simple de l'estimation de Johnsen. Motohashi a ensuite obtenu dans [11] une nouvelle démonstration, via le grand crible, du résultat de [13], répondant ainsi à une question posée dans le même travail.

La majoration finale pour $S(\mathcal{A}, \mathcal{P}; z)$ est explicitée dans [13] lorsque $\mathcal{A}$ est un intervalle. Nous nous proposons, dans un premier temps, d'étendre la formulation au cas général. Supposons que l'on puisse écrire

$$\sum_{\substack{a \in \mathcal{A} \\ a \in \mathcal{W}(d)}} 1 = \frac{w(d)}{d} X + r_d \qquad (d \geqslant 1), \tag{4·2}$$

où $X \geqslant 0$ est une quantité indépendante de d, w est une fonction multiplicative positive ou nulle, et r_d est, en un sens convenable, un terme d'erreur. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que

$$w(p^\nu) = 0 \qquad (p \notin \mathcal{P}_z,\, \nu \geqslant 1) \tag{4·3}$$

et que

$$\sum_{\nu \geqslant 1} \frac{w(p^\nu)}{p^\nu} < 1 \quad (p \in \mathcal{P}_z), \tag{4·4}$$

ce qui, dans les cas usuels d'application, équivaut au fait que $n \notin \cup_{\nu \geqslant 1} \mathcal{W}(p^\nu)$ a lieu pour au moins un entier n.

Soit $D > 1$. Pour toute suite réelle $\{\lambda_d\}$ vérifiant $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_d = 0$ pour $d > D$, on a

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}; z) \leqslant \sum_{a \in \mathcal{A}} \Big(\sum_{a \in \mathcal{W}(d)} \lambda_d\Big)^2. \tag{4·5}$$

En effet, le terme d'indice a dans la somme de (4·5) est toujours positif ou nul (puisque les λ_d sont réels) et il vaut $\lambda_1 = 1$ si a est compté dans $S(\mathcal{A}, \mathcal{P}; z)$.

Introduisons la fonction multiplicative (au sens de Selberg dans [13])

$$\varepsilon(p^\mu, p^\nu) := \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = \nu \text{ ou } \mu\nu = 0, \\ 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

La condition initiale de disjonction des classes $\mathcal{W}(p^\nu)$ implique que l'on ne peut avoir $\mathcal{W}(p^\mu) \cap \mathcal{W}(p^\nu) \neq \varnothing$ que si $\varepsilon(p^\mu, p^\nu) = 1$. Par multiplicativité, il s'ensuit que $\varepsilon(d, d') = 1$ dès que $\mathcal{W}(d) \cap \mathcal{W}(d') \neq \varnothing$. En développant le carré de (4·5), nous obtenons donc

$$\begin{aligned} S(\mathcal{A}, \mathcal{P}; z) &\leqslant \sum_{d,\, d' \leqslant D} \lambda_d \lambda_{d'} \sum_{\substack{a \in \mathcal{A} \\ a \in \mathcal{W}(d) \cap \mathcal{W}(d')}} 1 \\ &= \sum_{d,\, d' \leqslant D} \lambda_d \lambda_{d'} \varepsilon(d, d') \sum_{\substack{a \in \mathcal{A} \\ a \in \mathcal{W}([d, d'])}} 1 \\ &= X \sum_{d,\, d' \leqslant D} \lambda_d \lambda_{d'} \varepsilon(d, d') \frac{w([d, d'])}{[d, d']} + R, \end{aligned} \tag{4·6}$$

où

$$R := \sum_{d,\, d' \leqslant D} \lambda_d \lambda_{d'} \varepsilon(d, d') r_{[d, d']}. \tag{4·7}$$

Le calcul de Selberg ([13], pp. 239–240) pour minimiser le terme principal du membre de droite de (4·6) est valable sans changement. Posons

$$\vartheta(p^\nu) := 1 - \sum_{1 \leqslant \mu \leqslant \nu} \frac{w(p^\mu)}{p^\mu} > 0 \qquad (p \geqslant 2, \nu \geqslant 0).$$

Le minimum est atteint lorsque l'on a $\lambda_d = \lambda_d^*$ pour tout d, avec

$$\lambda_d^* := \frac{\sum_{m \leqslant D} t^*(m, d) t^*(m, 1)/g(m)}{\sum_{m \leqslant D} t^*(m, 1)^2/g(m)} \quad (d \leqslant D), \qquad \lambda_d^* := 0 \quad (d > D), \tag{4·8}$$

où g et t^* sont les fonctions multiplicatives d'une et deux variables respectivement définies par

$$g(p^\nu) := \{\vartheta(p^{\nu-1}) - \vartheta(p^\nu)\} \frac{\vartheta(p^\nu)}{\vartheta(p^{\nu-1})},$$

$$t^*(p^\mu, p^\nu) := \begin{cases} -\{\vartheta(p^{\mu-1}) - \vartheta(p^\mu)\}/\vartheta(p^{\mu-1}) & \text{si } \nu = 0, \\ \{\vartheta(p^{\mu-1}) - \vartheta(p^\mu)\}/\vartheta(p^{\mu-1}) & \text{si } 0 < \nu < \mu, \\ 1 & \text{si } \mu = \nu, \\ 0 & \text{si } \nu > \mu. \end{cases}$$

Nous observons que $t^*(m,1)=0$ si $P(m)>z$. Un calcul élémentaire montre que

$$\sum_{d\leqslant D,\, d'\leqslant D} \lambda_d^*\lambda_{d'}^*\varepsilon(d,d')\frac{w([d,d'])}{[d,d']} = \frac{1}{\sum_{\substack{d\leqslant D\\ P(d)\leqslant z}} \prod_{p^\nu \| d}\{1/\vartheta(p^\nu)-1/\vartheta(p^{\nu-1})\}}\cdot$$

D'autre part, comme $\sup_d |\lambda_d^*|=1$, nous pouvons écrire

$$|R|\leqslant \sum_{\substack{m\leqslant D^2\\ P(m)\leqslant z}}\ \sum_{[d,d']=m} \varepsilon(d,d')|r_m| = \sum_{\substack{m\leqslant D^2\\ P(m)\leqslant z}} 3^{\omega(m)}|r_m|,$$

où $\omega(m)$ est le nombre de diviseurs premiers distincts de m.

Nous avons ainsi obtenu le résultat suivant.

Théorème 4.1 (Selberg). *Sous les hypothèses* (4·2), (4·3) *et* (4·4), *nous avons*

$$S(\mathcal{A},\mathcal{P};z)\leqslant \frac{X}{\psi_f(D,z)} + \sum_{\substack{m\leqslant D^2\\ P(m)\leqslant z}} 3^{\omega(m)}|r_m|,$$

où f est la fonction multiplicative définie par $f(p^\nu):=p^\nu/\vartheta(p^\nu)-p^\nu/\vartheta(p^{\nu-1})$.

Effectuons l'hypothèse supplémentaire qu'il existe une constante positive $\eta\in]0,\frac12[$ et un entier $s\geqslant 1$ tels que

$$\vartheta(p^\nu)\geqslant\eta \quad (p\in\mathcal{P},\ \nu\geqslant 1), \tag{4·9}$$

$$\sum_p\sum_{1\leqslant\nu\leqslant s}\frac{w(p^\nu)^2\log p}{p^{2\nu}} + \sum_p\sum_{\nu>s}\frac{w(p^\nu)}{p^{(1-\eta)\nu}}<\infty. \tag{4·10}$$

Nous pouvons alors utiliser les résultats du paragraphe 3.2 pour minorer $\psi_f(D,z)$, en utilisant la décroissance en z de $S(\mathcal{A},\mathcal{P};z)$ pour traiter les très petites valeurs de z. Notant f_s la fonction multiplicative définie par

$$f_s(p^\nu):=\begin{cases}\displaystyle\sum_{1\leqslant j\leqslant s}\frac{f(p^j)}{p^{j-1}} & \text{si } \nu=1,\\ 0 & \text{si } 1<\nu\leqslant s,\\ f(p^\nu) & \text{si } \nu>r,\end{cases}$$

on vérifie aisément que l'on a

$$\psi_f^*(x,y)\leqslant\psi_{f_s}^*(x^{1/s},y) \qquad (x\geqslant 1,\ y\geqslant 1).$$

L'hypothèse $f_s \in \mathfrak{L}_\kappa(A, C, \eta)$ est alors satisfaite pour des constantes convenables $\kappa > 0$, A, C, $\eta \in]0, \frac{1}{2}[$ dès que

$$\sum_{1\leqslant \nu\leqslant s}\ \sum_{y<p\leqslant t} \frac{w(p^\nu)\log p}{p^\nu} \leqslant \kappa \log(t/y) + O(1) \qquad (t \geqslant y \geqslant 1). \tag{4·11}$$

Posons

$$W(z) := \prod_{p\leqslant z}\Big(1 - \sum_{\nu\geqslant 1}\frac{w(p^\nu)}{p^\nu}\Big),$$

de sorte que, avec la notation (1·1) pour la série de Dirichlet friable associée à la fonction f définie plus haut, nous avons $W(z) = 1/F(1, z)$.

Corollaire 4.2. *Soient $\kappa > 0$, $\eta \in]0, \frac{1}{2}[$. Sous les hypothèses* (4·2), (4·3), (4·9), (4·10), (4·11), *il existe une constante B telle que l'on ait, uniformément pour $2 \leqslant z \leqslant D^{1/s}$,*

$$S(\mathcal{A}, \mathcal{P}; z) \leqslant \frac{XW(z)}{j_\kappa(v)}\Big\{1 + O\Big(\frac{\lambda_\kappa^+(v)}{\log z}\mathrm{e}^{Bv(\log v)/\log z}\Big)\Big\} + \sum_{\substack{m\leqslant D^2\\ P(m)\leqslant z}} 3^{\omega(m)}|r_m|$$

où nous avons posé

$$v := \min\big\{(\log D)/(s\log z), 3(\log D)/(s\eta\log_2 D)\big\}, \quad \lambda_\kappa^+(v) := \lambda_\kappa(v)v\log(1+v).$$

Ce résultat renforce significativement, dès que $v \to \infty$, la majoration analogue déduite du Théorème A.

L'énoncé suivant fournit, à titre d'illustration, un cas concret d'application. Un autre exemple est fourni par le cas des entiers d'un intervalle représentables comme somme de deux carrés ; les détails seront développés dans un travail ultérieur. Lorsque $G \in \mathbb{Z}[X]$, nous désignons par $\varrho(d; G)$ le nombre des solutions dans $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ de la congruence $G(x) \equiv 0 \pmod d$.

Corollaire 4.3. *Soient $N \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle contenant N entiers, $q \in \mathbb{N}^*$, et $G(X) \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme de degré g, dont la décomposition canonique en produit de polynômes irréductibles s'écrit $G := b\prod_{1\leqslant j\leqslant r} G_j$, où $b \in \mathbb{Z}^*$ et les G_j sont distincts et unitaires. Il existe une constante $B_G > 0$, ne dépendant que de G, telle que l'on ait*

$$\sum_{\substack{n\in I\\ p^\nu\|q\Rightarrow p^\nu\nmid G(n)}} 1 \leqslant \frac{NW(q;G)}{j_r(v)}\Big\{1 + O\Big(v\lambda_r(v)v_N\mathrm{e}^{B_G v_N} + \frac{(\log N)^{4g}}{N^{\delta_q}}\Big)\Big\} \tag{4·12}$$

où l'on a posé $\delta_q := 1/\log\{3 + \omega(q)\}$,

$$v := \min\Big(\frac{\log N}{2\log P(q)}, \frac{\log N}{B_G\log_2 N}\Big), \qquad W(q;G) := \prod_{p^\nu\|q}\Big(1 - \frac{\varrho(p^\nu;G)}{p^\nu}\Big),$$

et $v_N := v\{\log(v+1)\}/\log N$. La constante impliquée ne dépend que de G.

Démonstration. Observons d'abord que, si $W(q;G)=0$, il existe une puissance de nombre premier $p^\nu\|q$ telle que G soit identiquement nul modulo p^ν. Le membre de gauche de (4·12) est donc nul.

Dans toute la suite, nous supposons donc, sans perte de généralité, que $W(q;G)\neq 0$. La minoration

$$W(q;G)\gg\Big(\frac{\varphi(q)}{q}\Big)^g\gg(\log\{3+\omega(q)\})^{-g},$$

où φ désigne l'indicatrice d'Euler, résulte alors immédiatement du fait que $\varrho(p^\nu;G)$ est uniformément borné et n'excède pas g sauf peut-être pour un nombre fini de valeurs de p^ν.

Appliquons le Corollaire 4.2 avec $s:=1$, $\mathcal{A}:=\{G(n):n\in I\}$, $\mathcal{P}:=\{p:p\mid q\}$, $z:=P(q)$, et

$$\mathcal{W}(p^\nu):=\begin{cases}\{0\} & \text{si } p^\nu\|q,\\ \varnothing & \text{dans le cas contraire.}\end{cases}$$

Convenons d'écrire $d\|q$ pour signifier que $d|q$ et $(d,q/d)=1$. Lorsque cette condition est réalisée, on a

$$\sum_{\substack{a\in\mathcal{A}\\ a\in\mathcal{W}(d)}}1=\sum_{\substack{n\in I\\ G(n)\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,d)}}1=\frac{\varrho(d;G)}{d}N+O\big(\varrho(d;G)\big),$$

et le membre de gauche est nul lorsqu'elle ne l'est pas. Les hypothèses du Corollaire 4.2 sont donc vérifiées avec

$$w(p^\nu):=\begin{cases}\varrho(p^\nu;G) & \text{si } p^\nu\|q,\\ 0 & \text{dans les autres cas.}\end{cases}$$

Nous notons, en effet, que la validité de la condition (4·9) résulte immédiatement des propriétés rappelées plus haut de la fonction $\varrho(p^\nu;G)$ — voir, par exemple, [16], §2, pour les détails. Comme on a

$$\varrho(p^\nu;G)=\sum_{1\leqslant j\leqslant r}\varrho(p;G_j)$$

sauf pour un nombre fini de valeurs de p^ν — voir, par exemple [16], formule (2.11) —, une application standard du théorème des idéaux premiers — cf., e.g., [16], lemme 3.1 — permet de voir que l'hypothèse (4·11) est satisfaite avec $\kappa=r$.

Choisissons alors $D:=\sqrt{N}$ dans le Corollaire 4.2. Nous obtenons, dans les conditions de l'énoncé,

$$\sum_{\substack{n\in I\\ p^\nu\|q\Rightarrow p^\nu\nmid G(n)}}1\leqslant\frac{NW(q;G)}{j_r(v)}\bigg\{1+O\bigg(\frac{\lambda_r^*(v)}{\log N}+R\bigg)\bigg\}\tag{4·13}$$

avec

$$\lambda_r^*(v) := \lambda_r(v)v^2 \log(v+1), \quad R := \sum_{\substack{d\leqslant N\\ d\| q}} 3^{\omega(d)}\varrho(d;G).$$

Nous estimons R par la méthode de Rankin. Pour tout $\alpha \in \,]0,1[$, nous pouvons écrire, notant p_j le j-ième nombre premier,

$$\begin{aligned} R &\ll N^\alpha \sum_{d\|q} \frac{(3g)^{\omega(d)}}{d^\alpha} = N^\alpha \prod_{p^\nu\|q}\Big(1+\frac{3g}{p^{\alpha\nu}}\Big) \\ &\ll N^\alpha \prod_{p\leqslant p_{\omega(q)}}\Big(1+\frac{3g}{p^\alpha}\Big) \ll N^{1-\delta_q}(\log\{3+\omega(q)\})^{3g}, \end{aligned} \tag{4·14}$$

pour le choix $\alpha := 1-\delta_q$. □

5. Estimations relatives aux nombres $f(p)$

Nous utilisons systématiquement la notation (2·11) et posons

$$\alpha_\kappa = \alpha_\kappa(x,y) := 1 - \frac{\xi_\kappa(u)}{\log y}\cdot \tag{5·1}$$

Pour les valeurs relatives de x et y considérées dans la suite, cette quantité est une bonne approximation du point-selle associé au calcul de $\Psi_f(x,y)$ ou $\psi_f^*(x,y)$.

Lemme 5.1. *Soient A et κ deux constantes positives. Pour toute fonction arithmétique f satisfaisant à (2·14), on a*

$$f(p) \leqslant (A+\kappa)p/\log p \tag{5·2}$$

pour tout nombre premier p. De plus, il existe deux constantes positives c_4 et y_0, ne dépendant que de A et κ, telles que l'on ait

$$f(p)/p^{\alpha_\kappa} \leqslant \tfrac12 \tag{5·3}$$

pour $y_0 \leqslant p \leqslant y$ et $1 \leqslant u \leqslant c_4(\log y)/\log_2 y$.

Démonstration. La relation (2·14) appliquée avec $z = p$ et $w = p-1$ fournit immédiatement

$$f(p)\frac{\log p}{p} = \kappa\log(1+1/p) + r_f(p) - r_f(p-1) \leqslant \kappa + A. \tag{5·4}$$

Pour tout $t > 0$, on a $t^{1-\alpha_\kappa}/\log t = \mathrm{e}^{\vartheta(\log t)}$ où $\vartheta(v) := (1-\alpha_\kappa)v - \log v$ est convexe. Il s'ensuit que, pour chaque y_0 fixé et $y_0 \leqslant p \leqslant y$,

$$f(p)p^{-\alpha_\kappa} \leqslant (A+\kappa)p^{1-\alpha_\kappa}/\log p \leqslant (A+\kappa)\big(y_0^{1-\alpha_\kappa}/\log y_0 + y^{1-\alpha_\kappa}/\log y\big).$$

Soit $K > 0$. Pour c_4 assez petite et y_0 assez grande, on a $\xi_\kappa(u) \leqslant \log_2 y - K$ dans le domaine indiqué. La majoration précédente est donc $\ll (A+\kappa)\mathrm{e}^{-K}$, d'où l'on déduit bien (5·3) en choisissant convenablement K. □

Lemme 5.2. *Soient A et κ deux constantes positives. Pour toute fonction arithmétique f satisfaisant à (2·14), on a*

$$\sum_p \frac{f(p)^2}{p^2} \leqslant 4(A+\kappa)^2. \tag{5·5}$$

Démonstration. La relation (2·14) implique, pour tout entier $j \geqslant 1$,

$$\sum_{2^j \leqslant p < 2^{j+1}} \frac{f(p)\log p}{p} \leqslant A+\kappa. \tag{5·6}$$

Il suit, grâce à (5·2),

$$\sum_p \frac{f(p)^2}{p^2} \leqslant (A+\kappa)\sum_p \frac{f(p)}{p\log p} \leqslant \frac{(A+\kappa)^2}{(\log 2)^2}\sum_{j\geqslant 1}\frac{1}{j^2} \leqslant 4(A+\kappa)^2.$$

□

Lemme 5.3. *Soient A et κ deux constantes positives. Pour toute fonction arithmétique f satisfaisant à (2·14) et tous nombres réels x, y satisfaisant à $x \geqslant 2$, $(\log x)^3 \leqslant y \leqslant x$, on a*

$$\sum_{p\leqslant y} \frac{f(p)^2}{p^{2\alpha_\kappa}} \ll 1 + \frac{u^2\xi_\kappa(u)}{\log y}, \tag{5·7}$$

$$\sum_{p\leqslant y} \frac{f(p)^2\log p}{p^{2\alpha_\kappa}} \ll Z_1(y;f) + u^2\xi_\kappa(u)\log\left(1+\frac{Z_2(y;f)\xi_\kappa(u)}{\log y}\right). \tag{5·8}$$

Démonstration. Par (5·2) et (5·6), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\sum_{p\leqslant y} \frac{f(p)^2}{p^{2\alpha_\kappa}} &\leqslant (A+\kappa)\sum_{p\leqslant y}\frac{f(p)p^{2(1-\alpha_\kappa)}}{p\log p}\\ &\leqslant \frac{4(A+\kappa)^2}{(\log 2)^2}\sum_{1\leqslant j\leqslant(\log y)/\log 2}\frac{2^{2(1-\alpha_\kappa)j}}{j^2}.\end{aligned}$$

On obtient (5·7) en faisant appel à l'estimation

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant J}\frac{2^{\beta j}}{j^2} \ll \frac{2^{\beta J}-1}{\beta J^2} + 1 \qquad (J\geqslant 1,\ \beta\in\,]0,1[),$$

qu'on établit aisément par sommation d'Abel.

Montrons (5·8). Comme la quantité à estimer est une fonction croissante de u, nous pouvons supposer $u > u_0$, où u_0 est une constante arbitrairement grande. Nous avons

$$E := \sum_{p\leqslant y} \frac{f(p)^2 \log p}{p^{2\alpha_\kappa}} \leqslant Z_1(y;f) + \sum_{p\leqslant y} \frac{f(p)^2(\log p)^2}{p^2} \frac{p^{2-2\alpha_\kappa}-1}{\log p}\cdot$$

Soient t un paramètre vérifiant $1/\log y \ll t \leqslant \frac12$ et $z := y^{1-t}$. Scindons la dernière somme au point z et observons que

$$\frac{p^{2-2\alpha_\kappa}-1}{\log p} \leqslant \frac{z^{2-2\alpha_\kappa}-1}{\log z} \ll \frac{\{u\xi_\kappa(u)\}^{2-2t}}{\log y} \qquad (p\leqslant z).$$

Nous obtenons

$$E \ll Z_1(y;f) + \{u\xi_\kappa(u)\}^{2-2t}\frac{Z_2(y;f)}{\log y} + E',$$

avec

$$E' := \sum_{z<p\leqslant y} \frac{f(p)^2(\log p)^2}{p^2} \frac{p^{2-2\alpha_\kappa}-1}{\log p}.$$

Ensuite, nous avons

$$E' \ll \frac{\{u\xi_\kappa(u)\}^2}{\log y} \sum_{z<p\leqslant y} \frac{f(p)\log p}{p} \ll tu^2\xi_\kappa(u)^2,$$

où la seconde estimation résulte de l'hypothèse (2·14). Comme nous avons supposé u assez grand, nous pouvons choisir $2t\log\{u\xi_\kappa(u)\} = \log\big(1+Z_2(y;f)\xi_\kappa(u)/\log y\big)$, d'où (5·8). □

Pour $f\in\mathfrak{L}_\kappa(A,C,\eta)$, nous posons

$$C_\kappa(f) := \prod_p (1-1/p)^\kappa \sum_{\nu\geqslant 0} f(p^\nu)/p^\nu, \tag{5·9}$$

où le produit infini est considéré comme nul lorsqu'il est divergent. Il résulte de (2·17) que cette dernière éventualité est exclue lorsque $f\in\mathfrak{M}_\kappa(A,C,\eta)$.

Lemme 5.4. *Soient $A>0$, $C>0$, $\kappa>0$, $\eta\in\,]0,\frac12]$. Il existe une constante $C_0 = C_0(A,C,\kappa,\eta)$ telle que, pour $f\in\mathfrak{L}_\kappa(A,C,\eta)$, on ait*

$$\mathrm{e}^{\gamma\kappa}C_\kappa(f)(\log y)^\kappa\Big(1-\frac{C_0}{\log y}\Big) \leqslant F(1,y) \leqslant C_0(\log y)^\kappa \qquad (y\geqslant 2). \tag{5·10}$$

$$\frac{F(1,x)}{F(1,y)} \geqslant u^\kappa\Big(1-\frac{C_0}{\log x}\Big) \qquad (y\geqslant x\geqslant 2). \tag{5·11}$$

De plus, on a, uniformément pour $f \in \mathfrak{M}_\kappa(A, C, \eta)$,

$$F(1,y) = \mathrm{e}^{\gamma\kappa} C_\kappa(f)(\log y)^\kappa \Big\{ 1 + O\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\}. \tag{5·12}$$

Démonstration. Pour toute fonction f de $\mathfrak{L}_\kappa(A, C, \eta)$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} F(1,y) &\leqslant \exp\Big\{ \sum_{p \leqslant y} \frac{f(p)}{p} + \sum_p \sum_{\nu \geqslant 2} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} \Big\} \\ &\leqslant \exp\Big\{ C + \kappa \log_2 y - \kappa \log_2 2 + G(y) \Big\} \ll (\log y)^\kappa \mathrm{e}^{G(y)} \end{aligned}$$

où l'on a posé, pour tout $z \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} G(z) &:= \int_{2-}^{z} \frac{\mathrm{d}\{r_f(t) - r_f(2-)\}}{\log t} \\ &= \frac{r_f(z) + \kappa \log 2}{\log z} + \int_2^z \frac{r_f(t) + \kappa \log 2}{t(\log t)^2} \,\mathrm{d}t \leqslant \frac{A}{\log 2} + \kappa, \end{aligned} \tag{5·13}$$

en vertu de l'hypothèse (2·14). Cela établit l'inégalité de droite de (5·10).

Pour montrer l'inégalité de gauche de (5·10) et la formule asymptotique (5·12), nous pouvons clairement supposer la convergence du produit infini $C_\kappa(f)$. Nous pouvons alors écrire

$$F(1,y) = \prod_{p \leqslant y} \sum_{\nu \geqslant 0} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} = C_\kappa(f) \prod_{p \leqslant y} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{-\kappa} \mathcal{P}_\kappa(f; y)^{-1}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\kappa(f; y) &:= \prod_{p > y} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{\kappa} \sum_{\nu \geqslant 0} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} \\ &= \exp\Big\{ \sum_{p > y} \frac{f(p) - \kappa}{p} + O\Big(\frac{1 + f(p)^2}{p^2} + \sum_{\nu \geqslant 2} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} \Big) \Big\}, \end{aligned}$$

où nous avons fait appel à l'hypothèse (3·3) et à l'inégalité (5·2).

La formule de Mertens fournit d'abord, classiquement,

$$\prod_{p \leqslant y} \Big(1 - \frac{1}{p}\Big)^{-\kappa} = \mathrm{e}^{\gamma\kappa} (\log y)^\kappa \Big\{ 1 + O_\kappa\Big(\frac{1}{\log y}\Big)\Big\}.$$

Ensuite, grâce à la seconde formule de Mertens

$$\sum_{p \leqslant t} \frac{1}{p} = \log_2 t + a + O\Big(\frac{1}{\log t}\Big) \quad (t \geqslant 2),$$

où a est une constante convenable, nous pouvons écrire

$$\sum_{p>y} \frac{f(p)-\kappa}{p} = \int_y^\infty \frac{\mathrm{d}\{r_f(t)-r_f(2-)\}}{\log t} + O\Big(\frac{1}{\log y}\Big),$$

et une intégration par parties analogue à celle de (5·13) fournit

$$\sum_{p>y} \frac{f(p)-\kappa}{p} \begin{cases} \leqslant \dfrac{A+\kappa}{\log y} + O\Big(\dfrac{1}{\log y}\Big) & \text{si } f \in \mathfrak{L}_\kappa(A,C,\eta), \\ \ll \dfrac{1}{\log y} & \text{si } f \in \mathfrak{M}_\kappa(A,C,\eta). \end{cases}$$

D'autre part, il résulte aisément de (2·14) et (5·6) que

$$\sum_{p>y} \frac{1+f(p)^2}{p^2} \ll \frac{1}{\log y}$$

alors que la condition (3·3) fournit

$$\sum_{p>y}\sum_{\nu\geqslant 2} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} \leqslant \sum_{p}\sum_{\nu\geqslant 2} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu}\Big(\frac{p}{y}\Big)^{\nu\eta} \ll \frac{1}{y^{2\eta}}.$$

Nous déduisons donc de ce qui précède que l'on a pour y assez grand

$$\mathcal{P}_\kappa(f;y) \begin{cases} \leqslant \exp\{C_0/(2\log y)\} & \text{si } f \in \mathfrak{L}_\kappa(A,C,\eta), \\ = \exp\{O(1/\log y)\} & \text{si } f \in \mathfrak{M}_\kappa(A,C,\eta). \end{cases}$$

Cela implique bien l'inégalité de gauche de (5·10) et la formule (5·12).

Finalement, établissons (5·11). Avec les notations introduites plus haut, nous avons

$$\frac{F(1,y)}{F(1,x)} = \prod_{x<p\leqslant y}\sum_{\nu\geqslant 0} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} = \prod_{x<p\leqslant y}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{-\kappa}\mathcal{P}_\kappa(f;x,y)$$

avec

$$\mathcal{P}_\kappa(f;x,y) := \prod_{x<p\leqslant y}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{\kappa}\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{f(p^\nu)}{p^\nu} \leqslant \exp\Big\{\frac{C_0}{\log x}\Big\}.$$

L'inégalité annoncée découle donc de la formule de Mertens. □

6. Majoration préliminaire

Les démonstrations des Théorèmes 3.1 et 3.2 reposent de manière essentielle sur la disponibilité d'une « bonne » majoration pour $\psi_f^*(x,y)$. Dans le cas des fonctions de $\mathfrak{L}_\kappa(A,C,\eta)$, une estimation relativement grossière est suffisante. C'est ce que nous obtenons au Lemme 6.1 ci-dessous. Dans le cas des fonctions de $\mathfrak{M}_\kappa(A,C,\eta)$, en revanche, nous visons une formule asymptotique et la majoration optimale à constante multiplicative près

$$\psi_f^*(x,y) \ll F(1,y)\lambda_\kappa(u) \tag{6·1}$$

s'avère indispensable pour préserver la qualité du résultat final. Cette estimation nous sera en fait fournie, dans le domaine requis en (x,y), par le Théorème 3.1.

Nous obtenons notre majoration préliminaire par une simple application de la méthode de Rankin. Grâce au choix précis des paramètres issu de la méthode du col, cela fournit incidemment une amélioration significative du lemme 1 de [5].

Lemme 6.1. *Soient $A>0$, $C>0$, $\kappa>0$ et $\eta\in\,]0,\frac12[$. On a*

$$\psi_f^*(x,y) \ll F(1,y)\lambda_\kappa(u)\,\xi_\kappa(u)\sqrt{u+1}\,\mathrm{e}^{Au\xi_\kappa(u)/\log y} \tag{6·2}$$

uniformément pour

$$f\in\mathfrak{L}_\kappa(A,C,\eta),\quad y\geqslant 2,\quad 0\leqslant u\leqslant y^\eta/\log y. \tag{6·3}$$

En particulier, on a

$$\psi_f^*(x,y) \ll F(1,y)\lambda_\kappa(u)\,\xi_\kappa(u)\sqrt{u+1} \tag{6·4}$$

uniformément pour $f\in\mathfrak{L}_\kappa(A,C,\eta)$, $y\geqslant 3$, $0\leqslant u\leqslant(\log y)/\log_2 y$.

Sous l'hypothèse supplémentaire (2·15)*, la majoration* (6·2) *a lieu pour tous $x>1$, $y\geqslant 2$.*

Démonstration. Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que y est assez grand. Nous appliquons la méthode de Rankin. Soit $\sigma\in\,]0,1]$. Sous l'hypothèse

$$K_\sigma := \sum_{p\leqslant y}\sum_{\nu\geqslant 2} f(p^\nu)/p^{\nu\sigma} < \infty,$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\psi_f^*(x,y) &\leqslant \sum_{\substack{n>x\\ P(n)\leqslant y}} \frac{f(n)}{n}\Big(\frac{n}{x}\Big)^{1-\sigma} \leqslant x^{\sigma-1}\prod_{p\leqslant y}\sum_{\nu\geqslant 0}\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu\sigma}}\\ &\leqslant x^{\sigma-1}\exp\Big\{\sum_{p\leqslant y}\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu\sigma}}\Big\} \leqslant x^{\sigma-1}\exp\Big\{K_\sigma+\sum_{p\leqslant y}\frac{f(p)}{p^\sigma}\Big\}.\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (3·3), nous pouvons choisir $\sigma = \alpha_\kappa \geqslant 1-\eta$ si (6·3) est réalisée. Lorsque (2·15) est satisfaite, le même choix est possible sans restriction puisque $\alpha_\kappa \in]0,1[$ si $x \leqslant N_y := \prod_{p\leqslant y} p$ et $\psi_f^*(x,y) = 0$ dans le cas contraire.

Comme on a, grâce à (5·5),

$$F(1,y) \geqslant \prod_{p\leqslant y}\Big(1+\frac{f(p)}{p}\Big) \gg \exp\Big\{\sum_{p\leqslant y}\frac{f(p)}{p}\Big\},$$

il suit

$$\psi_f^*(x,y) \ll F(1,y)\exp\Big\{-u\xi_\kappa(u) + \int_0^{1-\alpha_\kappa}\sum_{p\leqslant y}\frac{f(p)\log p}{p^{1-v}}\,\mathrm{d}v\Big\}. \tag{6·5}$$

La dernière somme en p n'excède pas

$$\int_1^y \frac{\kappa}{t^{1-v}}\,\mathrm{d}t + \int_{2-}^y t^v\,\mathrm{d}\{r_f(t)-r_f(y)\} \leqslant \int_0^{v\log y}\mathrm{e}^w\,\mathrm{d}w + Ay^v.$$

D'où

$$\psi_f^*(x,y) \leqslant F(1,y)\exp\Big\{-u\xi_\kappa(u) + \int_0^{\xi_\kappa(u)}\frac{\mathrm{e}^w-1}{w}\,\mathrm{d}w + \frac{Au\xi_\kappa(u)}{\log y}\Big\}.$$

Compte tenu de (2·4) et (2·6), cela fournit bien le résultat annoncé. □

7. Équations fonctionnelles

7·1. Forme initiale

Dans le lemme suivant, nous explicitons la forme initiale de l'équation fonctionnelle approchée de type Wirsing–Hildebrand pour la fonction $\psi_f^*(x,y)$. Étant donnés une fonction multiplicative f et un entier m, nous définissons une nouvelle fonction multiplicative par la formule

$$f_m(n) := \begin{cases} f(n) & \text{si } (n,m)=1,\\ 0 & \text{si } (n,m)>1.\end{cases} \tag{7·1}$$

Nous convenons également de poser

$$r_f(z) = 0 \quad (0\leqslant z\leqslant 1). \tag{7·2}$$

Lemme 7.1. *Soient $A > 0$, $C > 0$, $\kappa > 0$, $\eta \in]0, \frac{1}{2}[$ et $f \in \mathfrak{L}_\kappa(A, C, \eta)$. Pour tous $x \geqslant 2$, $y \geqslant 2$, on a*

$$\psi_f^*(x, y) \log x + \int_x^\infty \frac{\psi_f^*(t, y)}{t} \,\mathrm{d}t = \kappa \int_{x/y}^x \frac{\psi_f^*(t, y)}{t} \,\mathrm{d}t + \sum_{1 \leqslant j \leqslant 3} E_j(x, y; f), \tag{7·3}$$

où l'on a posé

$$\begin{cases} E_1(x, y; f) := -\displaystyle\sum_{\substack{n > x/y \\ P(n) \leqslant y}} \frac{f(n)}{n} \Big\{ r_f(y) - r_f\Big(\frac{x}{n}\Big) \Big\}, \\ E_2(x, y; f) := -\displaystyle\sum_{\nu \geqslant 1} \sum_{p \leqslant y} \frac{f(p) f(p^\nu) \log p}{p^{\nu+1}} \psi_{f_p}^*(x/p^{\nu+1}, y), \\ E_3(x, y; f) := \displaystyle\sum_{\nu \geqslant 2} \sum_{p \leqslant y} \frac{f(p^\nu) \log p^\nu}{p^\nu} \psi_{f_p}^*(x/p^\nu, y). \end{cases} \tag{7·4}$$

Démonstration. Nous avons d'une part

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n > x \\ P(n) \leqslant y}} \frac{f(n) \log n}{n} &= \sum_{\substack{n > x \\ P(n) \leqslant y}} \frac{f(n)}{n} \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} \\ &= \psi_f^*(x, y) \log x + \int_x^\infty \frac{\psi_f^*(t, y)}{t} \,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{7·5}$$

D'autre part, l'identité $\log n = \sum_{p^\nu \| n} \log p^\nu$, fournit immédiatement

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n > x \\ P(n) \leqslant y}} \frac{f(n) \log n}{n} &= \sum_{\substack{mp^\nu > x \\ P(mp) \leqslant y,\, p \nmid m}} \frac{f(m) f(p^\nu) \log p^\nu}{mp^\nu} \\ &= \sum_{\nu \geqslant 1} \sum_{p \leqslant y} \frac{f(p^\nu) \log p^\nu}{p^\nu} \psi_{f_p}^*(x/p^\nu, y). \end{aligned} \tag{7·6}$$

Nous considérons comme terme principal du membre de droite la quantité

$$\begin{aligned} S := \sum_{p \leqslant y} \frac{f(p) \log p}{p} \psi_f^*(x/p, y) &= \sum_{\substack{n > x/y \\ P(n) \leqslant y}} \frac{f(n)}{n} \sum_{x/n < p \leqslant y} \frac{f(p) \log p}{p} \\ = \sum_{\substack{x/y < n \leqslant x \\ P(n) \leqslant y}} \frac{f(n)}{n} \Big\{ \kappa \log\Big(\frac{ny}{x}\Big) + r_f(y) - r_f\Big(\frac{x}{n}\Big) \Big\} &+ \psi_f^*(x, y) \big\{ \kappa \log y + r_f(y) \big\}. \end{aligned}$$

En observant que

$$\sum_{\substack{x/y<n\leqslant x\\ P(n)\leqslant y}} \frac{f(n)}{n}\log\Big(\frac{ny}{x}\Big) = \int_{x/y}^{x} \frac{\psi_f^*(t,y)-\psi_f^*(x,y)}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{x/y}^{x} \frac{\psi_f^*(t,y)}{t}\,\mathrm{d}t - \psi_f^*(x,y)\log y,$$

nous obtenons

$$S := \kappa\int_{x/y}^{x} \frac{\psi_f^*(t,y)}{t}\,\mathrm{d}t + E_1(x,y;f).$$

Par ailleurs, on vérifie aisément que

$$\sum_{p\leqslant y} \frac{f(p)\log p}{p}\psi_{f_p}^*(x/p,y) - S = E_2(x,y;f).$$

Cela implique bien le résultat annoncé. □

7·2. Exploitation de l'équation adjointe

Il résulte aisément de l'équation (2·1) et de la définition (2·5) que la fonction λ_κ est solution de l'équation différentielle aux différences

$$u\lambda_\kappa'(u) = \kappa\big\{\lambda_\kappa(u) - \lambda_\kappa(u-1)\big\}. \tag{7·7}$$

La relation (7·3) est une version discrète de cette équation écrite sous forme intégrale. C'est la comparaison des deux formules qui conduira aux estimations des Théorèmes 3.1 et 3.2.

Comme dans [18], nous utilisons de manière essentielle l'équation adjointe de (7·7), soit

$$\big\{ug(u)\big\}' = \kappa\big\{g(u+1) - g(u)\big\} \tag{7·8}$$

dont une solution est la fonction décroissante

$$\mu_\kappa(u) := \int_0^\infty \exp\bigg(- uv + \kappa\int_0^v \frac{1-\mathrm{e}^{-w}}{w}\,\mathrm{d}w\bigg)\,\mathrm{d}v \qquad (u>0). \tag{7·9}$$

Nous observons immédiatement qu'une manipulation de routine fournit l'évaluation asymptotique

$$\mu_\kappa(u) \sim 1/u \qquad (u\to\infty). \tag{7·10}$$

L'identité

$$u\lambda_\kappa(u)\mu_\kappa(u) = \kappa\int_{u-1}^{u} \lambda_\kappa(v)\mu_\kappa(v+1)\,\mathrm{d}v \qquad (u\geqslant 1), \tag{7·11}$$

qui découle aisément de (7·7) et (7·8) est un outil technique particulièrement bien adapté à l'exploitation des diverses équations fonctionnelles du problème considéré dans ce travail.

Pour $x > 0$, $y \geqslant 2$, et $f \in \mathfrak{L}_\kappa(A, C, \eta)$, nous posons

$$\nu_{f,y}(u) := \psi_f^*(x, y)/F(1, y), \tag{7·12}$$

où $F(s, y)$ est définie en (1·1).

Nous posons, avec les notations (7·4) et (2·11),

$$R_f^*(u; y) := \sum_{1 \leqslant j \leqslant 3} E_j(x, y; f). \tag{7·13}$$

Lemme 7.2. *Soient $A > 0$, $C > 0$, $\kappa > 0$, $\eta \in]0, \frac{1}{2}[$ et $f \in \mathfrak{L}_\kappa(A, C, \eta)$. Pour $y > 1$, $u \geqslant 1$, nous avons*

$$u\,\mu_\kappa(u)\nu_{f,y}(u) = \kappa \int_{u-1}^u \mu_\kappa(v+1)\nu_{f,y}(v)\,\mathrm{d}v - \int_u^\infty \mu_\kappa(v)\,\mathrm{d}\left\{\frac{R_f^*(v; y)}{F(1, y)\log y}\right\}. \tag{7·14}$$

Démonstration. Reportons (7·12) dans (7·3), effectuons le changement de variables $v = (\log t)/\log y$ dans les deux intégrales et divisons par $F(1, y)\log y$. Nous obtenons

$$u\,\nu_{f,y}(u) + \int_u^\infty \nu_{f,y}(v)\,\mathrm{d}v = \kappa \int_{u-1}^u \nu_{f,y}(v)\,\mathrm{d}v + \frac{R_f^*(u; y)}{F(1, y)\log y}.$$

Après différentiation relativement à u, multiplication par $\mu_\kappa(u)$ et intégration de u à l'infini, cette équation prend la forme

$$\begin{aligned} &\int_u^\infty \mu_\kappa(v)\,\mathrm{d}\left\{\frac{R_f^*(v; y)}{F(1, y)\log y}\right\} \\ &\qquad = \int_u^\infty v\mu_\kappa(v)\,\mathrm{d}\nu_{f,y}(v) - \kappa \int_u^\infty \mu_\kappa(v)\{\nu_{f,y}(v) - \nu_{f,y}(v-1)\}\,\mathrm{d}v. \end{aligned} \tag{7·15}$$

Or, une intégration par parties tenant compte des relations $\lim_{u\to\infty} u\mu_\kappa(u) = 1$, $\lim_{u\to\infty} \nu_{f,y}(u) = 0$, fournit, grâce à (7·8),

$$\int_u^\infty v\mu_\kappa(v)\,\mathrm{d}\nu_{f,y}(v) = -u\mu_\kappa(u)\nu_{f,y}(u) - \kappa \int_u^\infty \nu_{f,y}(v)\{\mu_\kappa(v+1) - \mu_\kappa(v)\}\,\mathrm{d}v.$$

Nous obtenons donc le résultat annoncé en reportant dans (7·15). □

8. Estimations initiales

Le processus itératif utilisé pour démontrer les Théorèmes 3.1 et 3.2 nécessite une évaluation précise des conditions initiales, qui correspondent ici au cas $y = x$. Ces renseignements sont obtenus au Lemme 8.2 *infra*. Pour établir ce résultat, nous commençons par énoncer une équation fonctionnelle pour $\psi_f(x) := \psi_f(x,x)$ analogue à celle du Lemme 7.1 pour $\psi_f^*(x,y)$. Nous conservons la notation (7·1) et posons pour $x \geqslant 1$

$$\begin{cases} D_1(x;f) := \sum_{n\leqslant x} \frac{f(n)}{n} r_f\Big(\frac{x}{n}\Big), \\ D_2(x;f) := -\sum_{\nu\geqslant 1}\sum_{p^{\nu+1}\leqslant x} \frac{f(p)f(p^\nu)\log p}{p^{\nu+1}}\psi_{f_p}(x/p^{\nu+1}), \\ D_3(x;f) := \sum_{\nu\geqslant 2}\sum_{p^\nu\leqslant x} \frac{f(p^\nu)\log p^\nu}{p^\nu}\psi_{f_p}(x/p^\nu), \\ \quad R_f(x) := \sum_{1\leqslant j\leqslant 3} D_j(x;f). \end{cases} \tag{8·1}$$

Nous omettons la démonstration, qui est très voisine de celle du Lemme 7.1.

Lemme 8.1. *Pour toute fonction multiplicative f et tout $x \geqslant 1$, on a*

$$\psi_f(x)\log x = (\kappa+1)\int_1^x \frac{\psi_f(t)}{t}\,\mathrm{d}t + R_f(x). \tag{8·2}$$

Les démonstrations des Théorèmes 3.1 et 3.2 reposent sur l'exploitation de l'équation fonctionnelle (7·3). Le lemme suivant permet fournit les valeurs initiales. Rappelons que la fonction j_κ définie en (2·5) vérifie

$$j_\kappa(1) = 1 - \lambda_\kappa(1) = \mathrm{e}^{-\gamma\kappa}/\Gamma(\kappa+1).$$

Lemme 8.2. *Soient $A > 0$, $C > 0$, $\kappa > 0$ et $\eta \in]0, \frac{1}{2}[$.*

(i) On a

$$\psi_f(x) = F(1,x)j_\kappa(1)\bigg\{1 + O\bigg(\frac{Z_1(x;f)}{\log x}\bigg)\bigg\} \tag{8·3}$$

uniformément pour $f \in \mathfrak{M}_\kappa(A,C,\eta)$ et $x \geqslant 2$.

(ii) Il existe une constante positive $C_0 = C_0(A,C,\kappa,\eta)$ telle que l'on ait

$$\psi_f(x) \geqslant F(1,x)j_\kappa(1)\bigg\{1 - \frac{C_0}{1+\log x}\bigg\} \tag{8·4}$$

pour $f \in \mathfrak{L}_\kappa(A,C,\eta)$ et $x \geqslant 1$.

Démonstration. Il résulte immédiatement de (8·1), (3·3), et (2·14) ou (2·17) que l'on a

$$R_f(x) \ll \psi_f(x) Z_1(x;f) \quad \text{si } f \in \mathfrak{M}_\kappa(A,C,\eta),$$

$$R_f(x) \leqslant B\psi_f(x) \quad \text{si } f \in \mathfrak{L}_\kappa(A,C,\eta),$$

où B est une constante positive convenable. En particulier, nous avons, pour x_0 convenable,

$$U_f(x) := R_f(x)/\psi_f(x) \leqslant \tfrac{1}{2}\log x \qquad (x \geqslant x_0)$$

et nous pouvons déduire de (8·2) que la fonction

$$\vartheta_f(x) := \frac{\kappa+1}{(\log x)^{\kappa+1}} \int_1^x \frac{\psi_f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

vérifie pour x assez grand

$$\frac{\vartheta_f'(x)}{\vartheta_f(x)} = \frac{(\kappa+1)U_f(x)}{x(\log x)\{\log x - U_f(x)\}}\cdot \tag{8·5}$$

Par intégration sur $[x,\infty[$, il suit, lorsque $f \in \mathfrak{M}_\kappa(A,C,\eta)$, pour une constante convenable K,

$$\log\{\vartheta_f(x)/K\} \ll \frac{Z_1(x;f)}{\log x} \qquad (x \geqslant x_0),$$

d'où, en reportant dans (8·2),

$$\psi_f(x) = K(\log x)^\kappa \Big\{1 + O\Big(\frac{Z_1(x;f)}{\log x}\Big)\Big\}.$$

La valeur de K peut être obtenue de diverses manières. Nous employons, par exemple, le théorème taubérien de Hardy–Littlewood–Karamata sous la forme donnée au théorème II.7.8 de [17], qui fournit, en posant $\mathcal{F}(s) := \sum_{n\geqslant 1} f(n)/n^s$,

$$K := \frac{1}{\Gamma(\kappa+1)} \lim_{\sigma\to 1+} \mathcal{F}(\sigma)(\sigma-1)^\kappa = \frac{C_\kappa(f)}{\Gamma(\kappa+1)}\cdot$$

L'assertion (i) de notre énoncé résulte alors de (5·12).

Lorsque $f \in \mathfrak{L}_\kappa(A,C,\eta)$, nous commençons par fixer $x \geqslant 2$ et remplacer $f(p^\nu)$ par $\tau_\kappa(p^\nu) := \binom{\kappa+\nu-1}{\nu}$ pour $p > x$, ce qui ne modifie pas la valeur de $\psi_f(x)$. On vérifie alors aisément, par exemple grâce au théorème taubérien de Hardy–Littlewood–Karamata, que

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} \frac{\psi_f(t)}{(\log t)^\kappa} &= \lim_{t\to\infty} \vartheta_f(t) \\ &= \frac{C_\kappa(f)}{\Gamma(\kappa+1)} = \frac{1}{\Gamma(\kappa+1)} \prod_{p\leqslant x} (1-1/p)^\kappa \sum_{\nu\geqslant 0} f(p^\nu)/p^\nu \\ &= \frac{j_\kappa(1)F(1,x)}{(\log x)^\kappa}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log x}\Big)\Big\}. \end{aligned} \tag{8·6}$$

Ensuite, nous réécrivons (8·2) sous la forme

$$\frac{\psi_f(t)}{(\log t)^\kappa} = \vartheta_f(t) + \frac{R_f(t)}{(\log t)^{\kappa+1}} \tag{8·7}$$

d'où nous déduisons

$$\mathrm{d}\Big\{\frac{\psi_f(t)}{(\log t)^\kappa}\Big\} = \frac{\mathrm{d}R_f(t)}{(\log t)^{\kappa+1}} = \frac{\mathrm{d}\{R_f(t)-R_f(x)\}}{(\log t)^{\kappa+1}},$$

et donc, pour $z \geqslant x$,

$$\frac{\psi_f(z)}{(\log z)^\kappa} - \frac{\psi_f(x)}{(\log x)^\kappa} = \frac{R_f(z)-R_f(x)}{(\log z)^{\kappa+1}} + (\kappa+1)\int_x^z \frac{R_f(t)-R_f(x)}{t(\log t)^{\kappa+2}}\,\mathrm{d}t. \tag{8·8}$$

Par (8·1), (3·3), et (2·14), nous avons, pour une constante convenable D et tout $t \geqslant x$,

$$R_f(t)-R_f(x) \leqslant D\psi_f(t) \leqslant DF(1,t) \leqslant DF(1,x)\Big(\frac{\log t}{\log x}\Big)^\kappa\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log x}\Big)\Big\}.$$

En notant que (8·6) et (8·7) impliquent

$$\lim_{z\to\infty}\frac{R_f(z)-R_f(x)}{(\log z)^{\kappa+1}} = 0,$$

nous obtenons, en faisant tendre z vers l'infini dans (8·8),

$$\frac{C_\kappa(f)}{\Gamma(\kappa+1)} - \frac{\psi_f(x)}{(\log x)^\kappa} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{\gamma\kappa}DC_\kappa(f)}{\log x}\Big\{1+O\Big(\frac{1}{\log x}\Big)\Big\}.$$

Compte tenu de la valeur de $C_\kappa(f)$ donnée en (8·6), cela établit bien la validité de l'assertion (ii). □

9. Démonstration du Théorème 3.1

Posons $\delta_{f,y}(u) := \nu_{f,y}(u)/\lambda_\kappa(u) = \psi_f^*(x,y)/\{F(1,y)\lambda_\kappa(u)\}$ $(u \geqslant 0)$ et

$$\delta_{f,y}^*(u) := 1 + \sup_{1/2\leqslant v\leqslant u}\{\delta_{f,y}(v)-1\}^+ \qquad (u \geqslant \tfrac12).$$

Nous devons établir l'existence d'une constante $B = B(A,C,\eta,\kappa)$ telle que, pour toute fonction f de $\mathfrak{L}_\kappa(A,C,\eta)$, on ait

$$\delta_{f,y}^*(u) \leqslant \mathrm{e}^{Bu\xi_\kappa(u)/\log y} \qquad (1 \leqslant u \leqslant y^{\eta/3}), \tag{9·1}$$

l'inégalité étant valable sans restriction sous l'hypothèse supplémentaire (2·15).

Lemme 9.1. *Soient $A > 0$, $C > 0$, $\kappa > 0$ et $\eta \in]0, \frac{1}{2}[$. Il existe une constante positive M_0 telle que l'on ait*

$$-\int_u^\infty \mu_\kappa(v)\,\mathrm{d}\Big\{\frac{R_f^*(v;y)}{F(1,y)}\Big\} \leqslant M_0\lambda_\kappa(u)\Big\{\xi_\kappa(u)\delta_{f,y}(u-1) + \mathrm{e}^{Au\xi_\kappa(u)/\log y}\Big\} \tag{9·2}$$

pour

$$f \in \mathfrak{L}_\kappa(A, C, \eta), \quad y \geqslant 3 \quad \text{et} \quad 1 \leqslant u \leqslant y^{\eta/3}. \tag{9·3}$$

De plus, sous l'hypothèse supplémentaire (2·15), *l'inégalité* (9·2) *est valable pour $f \in \mathfrak{L}_\kappa(A, C, \eta)$, $x > 1$, $y \geqslant 2$, en omettant le terme exponentiel du membre de droite.*

Démonstration. Posons, avec les notations (7·4),

$$I_j := \frac{-1}{F(1,y)}\int_u^\infty \mu_\kappa(v)\,\mathrm{d}E_j(y^v, y; f) \qquad (1 \leqslant j \leqslant 3), \tag{9·4}$$

et notons d'emblée que, puisque la fonction $E_2(x, y; f)$ définie en (7·4) est décroissante en x, nous avons $I_2 \leqslant 0$. Nous pouvons donc déduire de (7·14) que

$$u\,\mu_\kappa(u)\nu_{f,y}(u) \leqslant \kappa\int_{u-1}^u \mu_\kappa(v+1)\nu_{f,y}(v)\,\mathrm{d}v + \frac{I_1 + I_3}{\log y}. \tag{9·5}$$

Nous avons d'abord, par sommation d'Abel,

$$I_1 = -\int_u^\infty \{E_1(x, y; f) - E_1(y^v, y; f)\}\mu_\kappa'(v)\,\mathrm{d}v. \tag{9·6}$$

Le terme entre accolades vaut

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n > x/y \\ P(n) \leqslant y}} \frac{f(n)}{n}\{r_f(y) - r_f(x/n)\} - \sum_{\substack{n > y^{v-1} \\ P(n) \leqslant y}} \frac{f(n)}{n}\{r_f(y) - r_f(y^v/n)\} \\
&\quad = \sum_{\substack{x/y < n < y^{v-1} \\ P(n) \leqslant y}} \frac{f(n)}{n}\{r_f(y) - r_f(x/n)\} + \sum_{\substack{n > y^{v-1} \\ P(n) \leqslant y}} \frac{f(n)}{n}\{r_f(y^v/n) - r_f(x/n)\} \\
&\quad \leqslant A\psi_f^*(x/y, y).
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
I_1 &\leqslant \frac{A\mu_\kappa(u)\psi_f^*(x/y,y)}{F(1,y)} = A\mu_\kappa(u)\lambda_\kappa(u-1)\delta_{f,y}(u-1) \\
&\leqslant A_1\lambda_\kappa(u)\xi_\kappa(u)\delta_{f,y}(u-1)
\end{aligned} \qquad (x > 1,\ y > 1), \tag{9·7}$$

pour une constante convenable A_1, en vertu de (2·7) et (7·10).

Une intégration par parties et le fait que $\mu_\kappa'(v) \leqslant 0$ permettent d'écrire

$$I_3 \leqslant \frac{\mu_\kappa(u)}{F(1,y)} \sum_{\nu\geqslant 2}\sum_{p\leqslant y} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} \psi_f^*\Big(\frac{x}{p^\nu}, y\Big). \tag{9·8}$$

Majorons $\psi_f^*(x/p^\nu, y)$ en appliquant (6·2). Posant $u_p := (\log p)/\log y$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\psi_f^*(x/p^\nu, y) &\ll F(1,y)\lambda_\kappa(u-\nu u_p)\xi_\kappa(u)u^{1/2}\mathrm{e}^{Au\xi_\kappa(u)/\log y}\\ &\ll F(1,y)\lambda_\kappa(u)p^{\eta\nu/2}\xi_\kappa(u)u^{1/2}\mathrm{e}^{Au\xi_\kappa(u)/\log y}\end{aligned}$$

lorsque $p^\nu \leqslant x/\sqrt{y}$. Dans le cas contraire, nous utilisons l'inégalité triviale $\psi_f^*(x/p^\nu, y) \leqslant F(1,y)$. Il vient, pour des constantes positives $M_j = M_j(A, C, \kappa, \eta)$ convenables,

$$\begin{aligned}I_3 &\leqslant \frac{M_1\lambda_\kappa(u)\xi_\kappa(u)\mathrm{e}^{Au\xi_\kappa(u)/\log y}}{u^{1/2}} \sum_{\nu\geqslant 2}\sum_{p\leqslant y} \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu(1-\eta)}} + \sum_{\nu\geqslant 2}\sum_{\substack{p\leqslant y\\ p^\nu > x/\sqrt{y}}} \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu(1-\eta)}x^{\eta/2}}\\ &\leqslant M_2\lambda_\kappa(u)\mathrm{e}^{Au\xi_\kappa(u)/\log y} + x^{-\eta/2} \leqslant M_3\lambda_\kappa(u)\mathrm{e}^{Au\xi_\kappa(u)/\log y},\end{aligned}$$

puisque $x^{-\eta/2} = \exp\{-(\eta/2)u\log y\} \leqslant \exp\{-(3/2)u\log u\} \ll \lambda_\kappa(u)$ dans le domaine $u \leqslant y^{\eta/3}$. Cela achève la démonstration de l'inégalité (9·2).

Sous l'hypothèse (2·15), l'intégrale I_3 est nulle. Le résultat annoncé découle alors, par les mêmes calculs, de la validité inconditionnelle de (6·2). □

Nous sommes à présent en mesure de compléter la démonstration du Théorème 3.1.

Nous commençons par observer que, d'après (8·4) et (5·11), nous avons, pour une constante positive convenable D et tous x, y tels que $2 \leqslant x \leqslant y$,

$$\begin{aligned}\psi_f^*(x,y) = F(1,y) - \psi_f(x) &\leqslant F(1,y) - F(1,x)j_\kappa(1)\Big(1 - \frac{D}{1+\log x}\Big)\\ &= F(1,y)\Big\{1 - j_\kappa(1)\frac{F(1,x)}{F(1,y)}\Big(1 - \frac{D}{1+\log x}\Big)\Big\}\\ &\leqslant F(1,y)\Big\{1 - j_\kappa(1)u^\kappa\Big(1 - \frac{2D}{1+\log x}\Big)\Big\}.\end{aligned}$$

Comme $\lambda_\kappa(u) = 1 - j_\kappa(1)u^\kappa$ pour $0 \leqslant u \leqslant 1$, nous avons donc obtenu, l'existence d'une constante $M = M(A, C, \eta, \kappa) > 0$ telle que l'on ait

$$\delta_{f,y}(u) \leqslant 1 + \frac{Mu^\kappa}{1+u\log y} \qquad (0 \leqslant u \leqslant 1) \tag{9·9}$$

pour $f \in \mathfrak{L}_\kappa(A,C,\eta)$, $y \geqslant 2$ et en particulier

$$\delta^*_{f,y}(1) = 1 + \sup_{1/2\leqslant u\leqslant 1} \{\delta_{f,y}(u) - 1\}^+ \leqslant 1 + \frac{2M}{\log y}\cdot \tag{9·10}$$

Lorsque $1 \leqslant w \leqslant u \leqslant \frac{3}{2}$, nous avons, en vertu de (9·5), de la première inégalité (9·7) et de (9·8),

$$w\,\mu_\kappa(w)\lambda_\kappa(w)\delta_{f,y}(w) \leqslant \kappa \int_{w-1}^{w} \mu_\kappa(v+1)\lambda_\kappa(v)\delta_{f,y}(v)\,\mathrm{d}v + \frac{M_4}{\log y}\cdot$$

Ici et dans toute la suite de cette démonstration nous désignons par M_j $(j \geqslant 4)$ des constantes positives convenables. Scindons l'intégrale à $w - \frac{1}{2}$ et majorons la contribution de l'intervalle $w - 1 \leqslant v \leqslant w - \frac{1}{2}$ en estimant $\delta_{f,y}(v)$ par (9·9). Il suit, pour une constante convenable M_5,

$$\begin{aligned}\delta_{f,y}(w) &\leqslant 1 + a(w)\{\delta^*_{f,y}(u) - 1\} + \frac{M_5}{\log y}\\ &\leqslant \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\delta^*_{f,y}(u) + \frac{M_5}{\log y},\end{aligned}$$

où nous avons posé

$$a(w) := \frac{\kappa}{w\mu_\kappa(w)\lambda_\kappa(w)} \int_{w-1/2}^{w} \mu_\kappa(v+1)\lambda_\kappa(v)\,\mathrm{d}v \leqslant \tfrac{1}{2},$$

la dernière inégalité résultant de (7·11) et de la décroissance de la fonction $v \mapsto \mu_\kappa(v+1)\lambda_\kappa(v)$.

En prenant le supremum pour $1 \leqslant w \leqslant u$, et en tenant compte de (9·10), nous obtenons donc que

$$\delta_{f,y}(\tfrac{3}{2}) = 1 + \sup_{1/2\leqslant u\leqslant 3/2} \{\delta_{f,y}(u) - 1\}^+ \leqslant 1 + \frac{M_6}{\log y}\cdot \tag{9·11}$$

Pour tout u de $[\frac{3}{2}, y^{\eta/3}]$ et tout w de $[u-1, u]$, nous pouvons écrire, grâce à (7·14) et (9·2),

$$\begin{aligned}w\mu_\kappa(w)\lambda_\kappa(w)\delta_{f,y}(w) &\leqslant \kappa \int_{w-1}^{w} \mu_\kappa(v+1)\lambda_\kappa(v)\delta_{f,y}(v)\,\mathrm{d}v\\ &\quad + \frac{M_0\lambda_\kappa(w)}{\log y}\Big\{\xi_\kappa(w)\delta_{f,y}(w-1) + \mathrm{e}^{Aw\xi_\kappa(w)/\log y}\Big\}.\end{aligned}$$

Majorons $\delta_{f,y}(v)$ par $\delta^*_{f,y}(u - \frac{1}{2})$ si $v \leqslant u - \frac{1}{2}$ et par $\delta^*_{f,y}(u)$ si $u - \frac{1}{2} < v \leqslant u$ puis $\delta_{f,y}(w-1)$ par $\delta^*_{f,y}(u - \frac{1}{2})$. Divisons ensuite l'inégalité obtenue par $w\mu_\kappa(w)\lambda_\kappa(w)$. Il suit

$$\delta_{f,y}(w) \leqslant \left(1 - a(w) + \frac{M_7\xi_\kappa(u)}{\log y}\right)\delta^*_{f,y}(u - \tfrac{1}{2}) + a(w)\delta^*_{f,y}(u) + \frac{M_7}{\log y}\mathrm{e}^{Aw\xi_\kappa(w)/\log y}.$$

À ce stade, observons que si $\delta^*_{f,y}(u) > \delta^*_{f,y}(u-\frac12)$, alors

$$\delta^*_{f,y}(u) = \sup_{u-1/2\leqslant w\leqslant u} \delta^*_{f,y}(w).$$

D'où, dans cette circonstance,

$$\delta^*_{f,y}(u) \leqslant \Big(1+\frac{2M_7\xi_\kappa(u)}{\log y}\Big)\delta^*_{f,y}(u-\tfrac12) + \frac{2M_7\mathrm{e}^{Au\xi_\kappa(u)/\log y}}{\log y}\cdot \tag{9·12}$$

Par une récurrence immédiate, cela implique, pour un choix convenable de B, la validité de (9·1) dans le domaine indiqué.

Sous l'hypothèse supplémentaire (2·15), le second terme du membre de droite de (9·12) peut être omis et l'inégalité est valable pour $x \geqslant y \geqslant 2$. L'itération de (9·12) conduit donc au résultat indiqué dans ce cas. □

10. Démonstration du Théorème 3.2

La fonction $\nu_{f,y}(u)$ étant définie en (7·12), il est commode ici de poser

$$\nu_{f,y}(u) = \lambda_\kappa(u) + \frac{\Delta_{f,y}(u)}{\log y}\cdot \tag{10·1}$$

Notre démonstration utilise de manière cruciale la majoration issue du Théorème 3.1

$$\psi^*_f(x,y) \ll F(1,y)\lambda_\kappa(u) \qquad (1\leqslant u \ll (\log y)/\log_2 y) \tag{10·2}$$

valable uniformément pour $f\in\mathfrak{L}_\kappa(A,C,\eta)$. Nous exploitons à nouveau l'équation fonctionnelle (7·14), réécrite sous la forme

$$u\,\mu_\kappa(u)\Delta_{f,y}(u) = \kappa\int_{u-1}^{u}\mu_\kappa(v+1)\Delta_{f,y}(v)\,\mathrm{d}v - \int_u^\infty \mu_\kappa(v)\,\mathrm{d}\Big\{\frac{R^*_f(v;y)}{F(1,y)}\Big\}, \tag{10·3}$$

mais nous avons à présent besoin d'une estimation bilatérale du terme d'erreur.

Dans toute la suite de la démonstration, nous utilisons la notation

$$V_f(x,y) := \xi_\kappa(u) + \frac{Z_1(y;f)}{u} + u\xi_\kappa(u)\log\Big(1+\frac{Z_2(y;f)\xi_\kappa(u)}{\log y}\Big). \tag{10·4}$$

Lemme 10.1. *Soient $A>0$, $C>0$, $\kappa>0$ et $\eta\in\,]0,\frac12[$. Il existe une constante positive c_9 telle que l'on ait*

$$\Big|\int_u^\infty \mu_\kappa(v)\,\mathrm{d}\Big\{\frac{R^*_f(v;y)}{F(1,y)}\Big\}\Big| \ll \lambda_\kappa(u)V_f(x,y) \tag{10·5}$$

uniformément pour

$$f\in\mathfrak{M}_\kappa(A,C,\eta),\quad y\geqslant 3\quad \textit{et}\quad 1\leqslant u\leqslant c_9(\log y)/\log_2 y. \tag{10·6}$$

Démonstration. Conservons les notations (9·4) pour les intégrales I_j $(1 \leqslant j \leqslant 3)$ dont la somme est égale à l'intégrale de (10·5). Les assertions à établir résultent donc de la validité, dans le domaine (10·6), des estimations

$$I_j \ll \lambda_\kappa(u) V_f(x,y) \qquad (1 \leqslant j \leqslant 3). \tag{10·7}$$

Le cas $j=1$ est presque immédiat. Il résulte en effet de la représentation (9·6) et du calcul qui la suit que l'on a

$$I_1 \ll \frac{\psi_f^*(x/y,y)}{uF(1,y)} \ll \lambda_\kappa(u)\xi_\kappa(u), \tag{10·8}$$

où l'on a utilisé (7·10), (10·2) et (2·7).

Le traitement de I_2 est analogue mais plus délicat. Nous observons d'abord qu'il résulte immédiatement de la définition de $E_2(x,y;f)$ que

$$I_2 \ll \frac{1}{uF(1,y)} \sum_{\nu \geqslant 1} \sum_{p \leqslant y} \frac{f(p)f(p^\nu)\log p}{p^{\nu+1}} \psi_f^*(x/p^{\nu+1},y).$$

Désignons par I_{21} la sous-somme correspondant à $\nu=1$ et par I_{22} la sous-somme complémentaire. Si $u \leqslant 3$, nous avons trivialement

$$I_{21} \ll \sum_{p \leqslant y} \frac{f(p)^2 \log p}{p^2} \ll \lambda_\kappa(u) V_f(x,y).$$

Si $u>3$, nous déduisons de (10·2) et (2·7) que, notant $u_p := (\log p)/\log y$,

$$\begin{aligned} I_{21} &\ll \frac{1}{u} \sum_{p \leqslant y} \frac{f(p)^2 \log p}{p^2} \lambda_\kappa(u-2u_p) \ll \frac{\lambda_\kappa(u)}{u} \sum_{p \leqslant y} \frac{f(p)^2 \log p}{p^{2\alpha_\kappa}} \\ &\ll \lambda_\kappa(u) V_f(x,y), \end{aligned}$$

d'après (5·8).

Nous avons ensuite, par (5·2),

$$I_{22} \ll \frac{1}{uF(1,y)} \sum_{\nu \geqslant 2} \sum_{p \leqslant y} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu} \psi_f^*(x/p^{\nu+1},y).$$

Majorons $\psi_f^*(x/p^{\nu+1},y)$ par

$$\ll F(1,y)\lambda_\kappa(u-(\nu+1)u_p) \ll \lambda_\kappa(u) p^{\eta\nu}$$

lorsque $p^\nu \leqslant y^{u-1/2}$ et, trivialement, par $\ll F(1,y)$ dans le cas contraire. Il vient

$$\begin{aligned} I_{22} &\ll \frac{\lambda_\kappa(u)}{u} \sum_{\nu \geqslant 2} \sum_{p \leqslant y} \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu(1-\eta)}} + \sum_{\nu \geqslant 2} \sum_{\substack{p \leqslant y \\ p^\nu > x/\sqrt{y}}} \frac{f(p^\nu)}{p^{\nu(1-\eta)} x^{\eta/2}} \\ &\ll \frac{\lambda_\kappa(u)}{u} + x^{-\eta/2} \ll \lambda_\kappa(u), \end{aligned}$$

puisque $x^{-\eta/2} \ll \exp\{-\eta u^2/(2c_9)\} \ll \lambda_\kappa(u)$ dans le domaine (10·6).

Cela établit bien (10·7) pour $j=2$.

Le cas $j = 3$ est relativement plus simple. Nous avons

$$|I_3| \leqslant \mu_\kappa(u) \sum_{\substack{p\leqslant y\\ \nu\geqslant 2}} \frac{f(p^\nu)\log p^\nu}{p^\nu} \psi_f^*(x/p^\nu, y) \tag{10·9}$$

et nous obtenons (10·7) avec $j = 3$ comme précédemment en employant (10·2) ou la majoration triviale selon que l'on a ou non $p^\nu \leqslant \sqrt{x}$.

Cela achève la démonstration. □

Nous déduisons immédiatement de (10·5) et de (10·3) une inéquation fonctionnelle pour $\Delta_{f,y}(u)$.

Lemme 10.2. *Soient $A > 0$, $C > 0$, $\kappa > 0$ et $\eta \in]0, \frac{1}{2}[$. Il existe deux constantes positives C_0 et c_1 telles que l'on ait*

$$u\mu_\kappa(u)|\Delta_{f,y}(u)| \leqslant \kappa \int_{u-1}^{u} \mu_\kappa(v+1)|\Delta_{f,y}(v)| \,\mathrm{d}v + C_0\lambda_\kappa(u)V_f(x,y) \tag{10·10}$$

pour $f \in \mathfrak{M}_\kappa(A, C, \eta)$, $y \geqslant 2$ et $1 \leqslant u \leqslant c_1(\log y)/\log_2 y$.

Le résultat suivant fournit une estimation préliminaire permettant d'initialiser le traitement récursif final.

Lemme 10.3. *Soient $A > 0$, $C > 0$, $\kappa > 0$, $\eta \in]0, \frac{1}{2}[$, $u_0 > 1$. Posons $\kappa_1 := \min(1, \kappa)$ et désignons par c_1 la constante apparaissant au Lemme 10.2. Sous les conditions*

$$y \geqslant 2, \quad 0 < u \leqslant u_0, \tag{10·11}$$

la formule asymptotique

$$\psi_f^*(x,y) = F(1,y)\bigg\{\lambda_\kappa(u) + O\bigg(\frac{1 + u^{\kappa_1-1}Z_1(y;f)}{\log y}\bigg)\bigg\} \tag{10·12}$$

est valable uniformément pour $f \in \mathfrak{M}_\kappa(A, C, \eta)$.

Démonstration. Nous déduisons de (8·3) et (5·12) que, pour $2 \leqslant x \leqslant y$,

$$\begin{aligned}\psi_f(x,y) = \psi_f(x) &= F(1,x)j_\kappa(1)\bigg\{1 + O\bigg(\frac{Z_1(x;f)}{\log x}\bigg)\bigg\}\\ &= \frac{C_\kappa(f)}{\Gamma(\kappa+1)}(u\log y)^\kappa\bigg\{1 + O\bigg(\frac{Z_1(y;f)}{u\log y}\bigg)\bigg\}.\end{aligned}$$

Cela implique bien (10·12) pour $0 < u \leqslant 1$, grâce à une nouvelle application de (5·12). Nous avons donc obtenu, avec la notation (10·1), l'existence d'une constante $C_0 = C_0(A, C, \eta)$ vérifiant

$$|\Delta_{f,y}(u)| \leqslant C_0\{1 + u^{\kappa-1}Z_1(y;f)\} \tag{10·13}$$

pour tous $f \in \mathfrak{M}_\kappa(A, C, \eta)$, $y \geqslant 2$ et $0 < u \leqslant 1$.

Posons alors $\Delta^*_{f,y}(u) := \sup_{1/2\leqslant v\leqslant u} |\Delta_{f,y}(v)|$. Nous allons montrer par récurrence sur l'entier j, $1 \leqslant j \leqslant 2u_0$, que

$$\Delta^*_{f,y}(u) \ll Z_1(y;f) \qquad (1 \leqslant u \leqslant \tfrac{1}{2}j+1). \tag{10·14}$$

D'après (10·13), nous avons d'abord

$$\sup_{1/2\leqslant v\leqslant 1} |\Delta_{f,y}(v)| \ll Z_1(y;f). \tag{10·15}$$

Ensuite, par (10·13) et le Lemme 10.2, nous voyons qu'il existe une constante C_1 telle que, pour tous u, w tels que $1 \leqslant w \leqslant u \leqslant \frac{3}{2}$,

$$\begin{aligned} w\mu_\kappa(w)|\Delta_{f,y}(w)| \leqslant \kappa C_0 &\int_{w-1}^{w-1/2} \mu_\kappa(v+1)\{1+v^{\kappa-1}Z_1(y;f)\}\,\mathrm{d}v \\ &+ \Delta^*_{f,y}(u)\kappa\int_{w-1/2}^{w} \mu_\kappa(v+1)\,\mathrm{d}v + C_1Z_1(y;f). \end{aligned}$$

Comme l'équation fonctionnelle (7·8) implique

$$0 \leqslant \kappa\int_{w-1/2}^{w} \mu_\kappa(v+1)\,\mathrm{d}v \leqslant \kappa\int_{w-1}^{w} \mu_\kappa(v+1)\,\mathrm{d}v = w\mu_\kappa(w)-1 \quad (w \geqslant 1),$$

il suit, pour une constante convenable C_2,

$$w\mu_\kappa(w)|\Delta_{f,y}(w)| \leqslant \{w\mu_\kappa(w)-1\}\Delta^*_{f,y}(u) + C_2Z_1(y;f).$$

En divisant par $w\mu_\kappa(w)$ et prenant le supremum du membre de gauche lorsque $w \in [1,u]$, nous obtenons immédiatement que, si $\Delta^*_{f,y}(u) > C_2Z_1(y;f)$, alors $\Delta^*_{f,y}(u)$ est égal au membre de gauche de (10·15).

Il s'ensuit que la majoration (10·14) est vérifiée pour $j=1$.

Supposons-la satisfaite pour $j \geqslant 1$. Sous l'hypothèse $1+\frac{1}{2}j \leqslant u \leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(j+1)$, nous avons alors, d'après le Lemme 10.2, pour tout w de $[1+\frac{1}{2}j, \frac{3}{2}+\frac{1}{2}j]$

$$\begin{aligned} w\mu_\kappa(w)|\Delta_{f,y}(w)| &\leqslant \kappa\int_{w-1}^{w} \mu_\kappa(v+1)\Delta^*_{f,y}(u)\,\mathrm{d}v + C_1Z_1(y;f) \\ &= \{w\mu_\kappa(w)-1\}\Delta^*_{f,y}(u) + C_1Z_1(y;f), \end{aligned}$$

et donc, en faisant tendre $|\Delta_{f,y}(w)|$ vers $\Delta^*_{f,y}(u)$,

$$\Delta^*_{f,y}(u) \leqslant C_1Z_1(y;f).$$

Cela établit que la propriété annoncée est bien inductive et achève la démonstration de la formule (10·12). □

Nous sommes à présent en mesure de terminer la preuve du Théorème 3.2.

Soit $u_0 > 1$ tel que $\inf_{v \geqslant u_0} v\mu_\kappa(v) \geqslant \frac{1}{2}$. D'après le Lemme 10.3, il existe une constante $C_3 = C_3(A, C, \kappa, \eta, u_0) > 8C_0$ telle que

$$|\Delta_{f,y}(u)| \leqslant C_3 \lambda_\kappa(u) u V_f(x, y) \qquad (1 \leqslant u \leqslant u_0,\ y \geqslant 2).$$

Pour $y \geqslant 2$ fixé, posons

$$u_2 = u_2(y) := \inf \big\{ v \geqslant 1 : |\Delta_{f,y}(v)| > C_3 v \lambda_\kappa(v) V_f(y^v, y) \big\}$$

et notons $x_2 := y^{u_2}$. Nous avons trivialement $u_2 \geqslant u_0$. Si $u_2 \leqslant c_1(\log y)/\log_2 y$, nous déduisons de (7·8), (10·10) et (7·11) que

$$\begin{aligned} C_3 u_2^2 \mu_\kappa(u_2) \lambda_\kappa(u_2) V_f(x_2, y) &\leqslant u_2 \mu_\kappa(u_2) |\Delta_{f,y}(u_2)| \\ &\leqslant \kappa \int_{u_2-1}^{u_2} \mu_\kappa(v+1) |\Delta_{f,y}(v)| \,\mathrm{d}v + C_0 \lambda_\kappa(u_2) V_f(x_2, y) \\ &\leqslant \Big\{ \kappa C_3 \int_{u_2-1}^{u_2} \mu_\kappa(v+1) v \lambda_\kappa(v) \,\mathrm{d}v + C_0 \lambda_\kappa(u_2) \Big\} V_f(x_2, y). \end{aligned} \tag{10·16}$$

Comme la fonction $v \mapsto \mu_\kappa(v+1)\lambda_\kappa(v)$ est décroissante, nous avons

$$\kappa \int_{u_2-1}^{u_2-1/2} \mu_\kappa(v+1)\lambda_\kappa(v) \,\mathrm{d}v \geqslant \tfrac{1}{2}\kappa \int_{u_2-1}^{u_2} \mu_\kappa(v+1)\lambda_\kappa(v) \,\mathrm{d}v = \tfrac{1}{2} u_2 \mu_\kappa(u_2) \lambda_\kappa(u_2),$$

d'où

$$\begin{aligned} &\kappa \int_{u_2-1}^{u_2} \mu_\kappa(v+1) v \lambda_\kappa(v) \,\mathrm{d}v \\ &\qquad \leqslant \kappa(u_2 - \tfrac{1}{2}) \int_{u_2-1}^{u_2-1/2} \mu_\kappa(v+1)\lambda_\kappa(v) \,\mathrm{d}v + \kappa u_2 \int_{u_2-1/2}^{u_2} \mu_\kappa(v+1)\lambda_\kappa(v) \,\mathrm{d}v \\ &\qquad \leqslant (u_2 - \tfrac{1}{4}) u_2 \mu_\kappa(u_2) \lambda_\kappa(u_2). \end{aligned}$$

En reportant dans (10·16), il suit, après division par $\lambda_\kappa(u_2) V_f(x_2, y)$,

$$\tfrac{1}{8} C_3 \leqslant \tfrac{1}{4} C_3 u_2 \mu_\kappa(u_2) \leqslant C_0,$$

ce qui contredit la définition de C_3. Cela achève la démonstration.

11. Démonstration du Théorème 3.3

11·1. Étude d'un cas particulier

Nous établissons trois propositions préliminaires, qui sont respectivement des modifications mineures des propositions 4.2, 4.3 et 4.4 de [19]. Dans toute la suite les numéros de formules $(a{\cdot}b)$ de [19] sont identifiés sous la forme $(\mathrm{I}{\cdot}a{\cdot}b)$.

Comme dans [19], nous désignons par $\mathcal{M}_\kappa^*(A;R)$ la classe des fonctions exponentiellement multiplicatives, i.e. telles que

$$f(p^\nu) = f(p)^\nu/\nu! \quad (p \geqslant 2, \nu \geqslant 1),$$

satisfaisant (3·11). Nous conservons également les notations

$$\Psi_f(x,y) := \sum_{n\in S(x,y)} f(n), \qquad R_b(y) := \int_{3/2}^y \frac{\mathrm{d}t}{tR(t^b)}.$$

Par souci de concision, dans toute la suite de ce paragraphe, nous renvoyons librement à [19] et nous nous limitons à signaler les modifications nécessaires des énoncés ou des démonstrations de [19].

Lemme 11.1. *Sous la condition supplémentaire $x \geqslant y$, la proposition 4.2 de [19] reste valable en remplaçant $E_0(x,y)$ par*

$$E_0'(x,y) := \frac{\xi_\kappa(u)}{\log y} \qquad (x \geqslant y \geqslant 3).$$

Démonstration. La preuve de la proposition 4.2 de [19] reste valable, moyennant les changements suivants.

•*Page 150, ligne 3 de [19].* D'après les estimations (I·3·35) et (I·4·12), on a

$$\begin{aligned} W_{j2} &\ll \frac{\Psi_f(3x/2,y)}{x} \ll (3/2)^\alpha \varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1} \\ &\ll \lambda_\kappa(u)(\log y)^\kappa \frac{\xi_\kappa(u)}{\log y} \quad (j=1,2), \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\xi_\kappa(u)^2}{(\log y)^2} W_{12} + W_{22} \ll \lambda_\kappa(u)(\log y)^\kappa E_0'(x,y).$$

•*Page 150, ligne -2 de [19].* Les relations (I·4·18) et (I·4·12) impliquent

$$\begin{aligned} \frac{\xi_\kappa(u)^2}{(\log y)^2} W_{11} + W_{21} &\ll \varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1}\left(1 + \frac{\xi_\kappa(u)^2 \log_2(3x)}{(\log y)^2}\right) \\ &\ll \lambda_\kappa(u)(\log y)^\kappa E_0'(x,y). \end{aligned}$$

•*Page 151, lignes 1-5 de [19].* On a

$$W_{j3} \ll \begin{cases} \varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1}\log_2(3x) & \text{si } j=1, \\ \varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1} & \text{si } j=2. \end{cases}$$

Il s'ensuit, comme précédemment, que

$$\begin{aligned} \frac{\xi_\kappa(u)^2}{(\log y)^2}W_{13}+W_{23} &\ll \varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1}\biggl(\frac{\xi_\kappa(u)^2\log_2(3x)}{(\log y)^2}+1\biggr) \\ &\ll \lambda_\kappa(u)(\log y)^\kappa E_0'(x,y). \end{aligned}$$

•*Page 151, lignes* -7 *à* -1 *de [19].* Estimons précisément les trois termes apparaissant à la ligne -4 de la page 151 de [19].

En utilisant (I·3·35) avec $(t,x)=(x,Y_\varepsilon^*)$, nous avons d'abord

$$\begin{aligned} \frac{x\Psi_f(xY_\varepsilon^*,y)}{(xY_\varepsilon^*)^2} &\ll \frac{x}{(xY_\varepsilon^*)^2}x^\alpha Y_\varepsilon^*\varrho_\kappa\biggl(\frac{\log Y_\varepsilon^*}{\log y}\biggr)(\log y)^{\kappa-1} \\ &\ll (Y_\varepsilon^*)^{-1}\varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1} \\ &\ll \lambda_\kappa(u)(\log y)^\kappa E_0'(x,y). \end{aligned}$$

Pour la seconde estimation, nous avons utilisé l'inégalité $\alpha \leqslant 1$ et le fait que $v \mapsto \varrho_\kappa(v)$ est positive et décroissante ($\kappa < 1$) ou unimodale ($\kappa \geqslant 1$). La troisième estimation résulte trivialement de $Y_\varepsilon^* \geqslant 1$ et (I·4·12).

Semblablement, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} x\int_{Y_\varepsilon^*}^{xY_\varepsilon^*}\frac{\Psi_f(t,y)}{t^3}\,\mathrm{d}t &= \frac{x}{(Y_\varepsilon^*)^2}\int_1^x\frac{\Psi_f(vY_\varepsilon^*,y)}{v^3}\,\mathrm{d}v \\ &\ll \frac{x}{(Y_\varepsilon^*)^2}\int_1^x\frac{v^\alpha Y_\varepsilon^*\varrho_\kappa(\log Y_\varepsilon^*/\log y)(\log y)^{\kappa-1}}{v^3}\,\mathrm{d}v \\ &\ll \varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1} \ll \lambda_\kappa(u)(\log y)^\kappa E_0'(x,y), \end{aligned}$$

où la première majoration résulte d'une application de (I·3·35) avec $(t,x)=(v,Y_\varepsilon^*)$. En utilisant (I·3·26) avec $x=t$, on a de plus

$$\begin{aligned} x\int_x^{Y_\varepsilon^*}\frac{\Psi_f(t,y)}{t^3}\,\mathrm{d}t &\ll x(\log y)^{\kappa-1}\int_x^{Y_\varepsilon^*}\frac{\varrho_\kappa(\log t/\log y)}{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &\ll \varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1} \ll \lambda_\kappa(u)(\log y)^\kappa E_0'(x,y). \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi

$$x\int_x^{xY_\varepsilon^*}\frac{\Psi_f(t,y)}{t^3}\,\mathrm{d}t \ll \lambda_\kappa(u)(\log y)^\kappa E_0'(x,y).$$

Il reste à examiner le troisième terme. D'après (I·3·25) et (I·4·12), nous avons

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-u\xi_\kappa(u)}(\log y)^{\kappa-1}\frac{\sqrt{u+1}\log y}{Y_\varepsilon^*} &\asymp \varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1}\widehat{\varrho}(-\xi_\kappa(u))^{-\kappa}\frac{u\log y}{Y_\varepsilon^*}\\ &\ll \varrho_\kappa(u)(\log y)^{\kappa-1} \ll \lambda_\kappa(u)(\log y)^\kappa E_0'(x,y).\end{aligned}$$

Cela achève la preuve du Lemme 11.1. □

Lemme 11.2. *Sous la condition supplémentaire $x \geqslant y$, la proposition 4.3 de [19] reste valable en remplaçant $E_\kappa^*(x,y)$ par*

$$E_\kappa^\dagger(x,y) := \frac{u\xi_\kappa(u)}{R(y^b)} + \frac{\xi_\kappa(u)R_b(y)}{\log y}. \tag{11·1}$$

Démonstration. Nous allons établir, avec les notations (I·4·33) et (I·4·34), les estimations asymptotiques

$$I_1 = \lambda_\kappa(u)\bigg\{1 + O\bigg(\frac{1}{(\log y)^{1+\kappa}}\bigg)\bigg\}, \tag{11·2}$$

$$I_2 \ll \lambda_\kappa(u)\frac{\varepsilon(u,y)}{\sqrt{u}}. \tag{11·3}$$

Le résultat annoncé découle immédiatement de ces estimations au vu de (I·4·32) et (I·4·20).

•*Preuve de* (11·2). Il suffit de démontrer que l'on a

$$I_1' := \int_{|t|\geqslant\frac12\log y}\widehat{j}_\kappa(w)\mathrm{e}^{uw}\,\mathrm{d}t \ll \frac{\lambda_\kappa(u)}{(\log y)^{1+\kappa}},$$

où, par convention, $w = -\xi_\kappa(u) + it$.

Soit $T := \max\{\frac12\log y,\, 1 + u\xi_k(u)\}$. Désignons par I_{11}' et I_{12}' les contributions respectives à I_1' des domaines $\frac12\log y \leqslant |t| \leqslant T$ et $|t| > T$.

Pour estimer I_{11}', nous pouvons supposer $T = 1 + u\xi_k(u) \geqslant \frac12\log y$ car le domaine d'intégration est vide dans le cas contraire. Nous avons alors, d'après (I·4·24) et le lemme 4.10 de [14],

$$\begin{aligned}I_{11}' &\ll \mathrm{e}^{-u\xi_\kappa(u)}\widehat{\varrho}(-\xi_\kappa(u))^\kappa\int_{\frac12\log y\leqslant|t|\leqslant T}\mathrm{e}^{-u/(\xi_\kappa(u)^2+\pi^2)}\frac{\mathrm{d}t}{t}\\ &\ll \varrho_\kappa(u)\sqrt{u}\,\mathrm{e}^{-u/(\xi_\kappa(u)^2+\pi^2)}\log T \ll \frac{\lambda_\kappa(u)}{(\log y)^{1+\kappa}},\end{aligned}$$

en vertu de (I·3·25) et (I·4·12).

D'autre part, on peut écrire, grâce à (I·4·35),

$$I'_{12} = \mathrm{e}^{-\gamma\kappa - u\xi_\kappa(u)} \int_{|t|\geqslant T} \left\{ \frac{1}{w^{1+\kappa}} + O\Big(\frac{1+u\xi_\kappa(u)}{w^{2+\kappa}}\Big) \right\} \mathrm{e}^{iut}\,\mathrm{d}t.$$

La contribution du terme d'erreur à la dernière intégrale est

$$\ll u\xi_\kappa(u)/T^{1+\kappa} \ll u\xi_\kappa(u)/(\log y)^{1+\kappa}.$$

Celle du terme principal $\mathrm{e}^{iut}/w^{1+\kappa}$ peut être estimée par la seconde formule de la moyenne : nous avons

$$\begin{aligned}\int_{|t|\geqslant T} \frac{\mathrm{e}^{iut}}{w^{1+\kappa}}\,\mathrm{d}t &= \int_{|t|\geqslant T} \frac{\mathrm{e}^{iut}}{\{-\xi_\kappa(u)+it\}^{1+\kappa}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{i^{1+\kappa}} \int_{|t|\geqslant T} \frac{\mathrm{e}^{iut}}{|t|^{1+\kappa}} \left\{ 1 + O\Big(\frac{\xi_\kappa(u)}{|t|}\Big) \right\} \mathrm{d}t \\ &\ll \frac{\xi_\kappa(u)}{uT^{1+\kappa}} \ll \frac{\xi_\kappa(u)}{u(\log y)^{1+\kappa}}.\end{aligned}$$

Nous avons donc établi que

$$I'_{12} \ll \mathrm{e}^{-u\xi_\kappa(u)} \frac{u\xi_\kappa(u)}{(\log y)^{1+\kappa}} \ll \frac{\lambda_\kappa(u)}{(\log y)^{1+\kappa}}.$$

•*Preuve de* (11·3). Compte tenu de (I·4·38), il suffit de démontrer que l'on a

$$I_{22} := \frac{1}{2\pi} \int_{T_2\leqslant|t|\leqslant\frac12\log y} D_y\Big(1+\frac{w}{\log y}\Big)\widehat{j}_\kappa(w)\mathrm{e}^{uw}\,\mathrm{d}t \ll \lambda_\kappa(u)\frac{\varepsilon(u,y)}{\sqrt{u}}.$$

Nous allons procéder comme dans [19] dans le cas $\kappa = 1$, $u > 1$.[3]

Similairement à (I·4·40), nous pouvons écrire, en vertu de la formule asymptotique (I·4·35),

$$I_{22} = I_{221} + I_{222}$$

avec

$$I_{221} := \frac{-\mathrm{e}^{-u\xi_1(u)-\gamma}}{\pi} \int_{T_2}^{\frac12\log y} \Re e\left(D_y\Big(1+\frac{w}{\log y}\Big)\mathrm{e}^{uit}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t^{1+\kappa}},$$

puisque l'on a $D_y(\overline{s}) = \overline{D_y(s)}$ pour $|s-1| < 1$, et

$$\begin{aligned}I_{222} &\ll \frac{T_2\varepsilon(u,y)}{\mathrm{e}^{u\xi_\kappa(u)}} \int_{T_2}^{\log y} \frac{t^{-1-\kappa}\,\mathrm{d}t}{1+\varepsilon(u,y)t} \\ &\ll \mathrm{e}^{-u\xi_\kappa(u)}T_2\varepsilon(u,y) \ll \lambda_\kappa(u)\frac{\varepsilon(u,y)}{\sqrt{u}}.\end{aligned}$$

3. Voir [19] p. 156, lignes 6-19.

Une intégration par parties fournit ensuite, compte tenu de (I·4·28), (I·4·29) et (I·4·41),

$$\begin{aligned}I_{221} &\ll \mathrm{e}^{-u\xi_\kappa(u)}\bigg\{\frac{\varepsilon(u,y)}{T_2^\kappa}+\int_{T_2}^{\frac12\log y}\bigg(\frac{|D_y'(1+w/\log y)|}{t^{1+\kappa}\log y}+\frac{|D_y(1+w/\log y)|}{t^{2+\kappa}}\bigg)\,\mathrm{d}t\bigg\}\\ &\ll \mathrm{e}^{-u\xi_\kappa(u)}\int_{T_2}^{\frac12\log y}\frac{\varepsilon(u,y)}{t^{1+\kappa}}\,\mathrm{d}t \ll \mathrm{e}^{-u\xi_\kappa(u)}\varepsilon(u,y)\ll\lambda_\kappa(u)\frac{\varepsilon(u,y)}{\sqrt{u}}\cdot\end{aligned}$$

Cela achève la démonstration. □

Les Lemmes 11.1 et 11.2 impliquent immédiatement le résultat suivant.

Lemme 11.3. *Sous la condition supplémentaire $x \geqslant y$, la proposition 4.4 de [19] reste valable avec $E_\kappa^\dagger(x,y)$ à la place de $E_\kappa^*(x,y)$.*

Le résultat suivant fournit la conclusion du Théorème 3.3 dans le cas particulier $f\in\mathcal{M}_\kappa^*(A;R)$. Nous verrons au paragraphe suivant que le cas général s'en déduit aisément grâce à un argument de convolution.

Lemme 11.4. *Soient $A>0$, $\varepsilon>0$, $\kappa>0$, $b\in]0,\frac12]$, $R\in\mathcal{R}(b;\kappa)$. On a*

$$\psi_f^*(x,y)=F(1,y)\lambda_\kappa(u)\big\{1+O\big(E_\kappa^\ddagger(x,y)\big)\big\}, \tag{11·4}$$

uniformément pour $f\in\mathcal{M}_\kappa^*(A;R)$, $y\geqslant 2$ et $\sqrt{y}\leqslant x\leqslant Y_\varepsilon^*$, où

$$E_\kappa^\ddagger(x,y):=\frac{u\xi_\kappa(u)}{R(y^{b/2})}+\frac{\xi_\kappa(u)R_b(y)}{\log y}.$$

Démonstration. Puisque $\mathrm{e}^{-\gamma\kappa}/\Gamma(\kappa+1)\leqslant j_\kappa(u)\leqslant 1$, le Lemme 11.3 implique que l'on a, uniformément pour $f\in\mathcal{M}_\kappa^*(A;R)$ et $2\leqslant y\leqslant x\leqslant Y_\varepsilon$,

$$\begin{aligned}\psi_f(x,y)&=\sum_{P(n)\leqslant y}\frac{f(n)}{n}-\sum_{\substack{n>x\\P(n)\leqslant y}}\frac{f(n)}{n}\\ &=F(1,y)j_\kappa(u)\big\{1+O\big(\lambda_\kappa(u)E_\kappa^\dagger(x,y)\big)\big\}.\end{aligned}\tag{11·5}$$

Nous allons maintenant établir que, sous l'hypothèse $\sqrt{y}\leqslant x\leqslant y$, cette formule reste valable en remplaçant $E_\kappa^\dagger(x,y)$ par $E_\kappa^\ddagger(x,y)$. À cette fin, nous observons que le cas particulier $y=x$ de (11·5), (I·2·7) et la formule

$$j_\kappa(u)=\frac{\mathrm{e}^{-\gamma\kappa}}{\Gamma(\kappa+1)}u^\kappa\qquad(0\leqslant u\leqslant 1)$$

impliquent, pour $\sqrt{y} \leqslant x \leqslant y$,

$$\begin{aligned} F(1,x)j_\kappa(1) &= \mathrm{e}^{\gamma\kappa} C_\kappa(f)(\log x)^\kappa \left\{1 + O\left(\frac{1}{R(x^b)}\right)\right\} \frac{\mathrm{e}^{-\gamma\kappa}}{\Gamma(\kappa+1)} \\ &= F(1,y)j_\kappa(u)\left\{1 + O\left(\frac{1}{R(y^{b/2})}\right)\right\} \end{aligned}$$

et

$$\lambda_\kappa(1)E_\kappa^\dagger(x,x) \ll \frac{1}{R(x^b)} + \frac{R_b(x)}{\log x} \ll \lambda_\kappa(u)\left(\frac{u\xi_\kappa(u)}{R(y^{b/2})} + \frac{\xi_\kappa(u)R_b(y)}{\log y}\right).$$

Cela fournit bien l'extension annoncée. Il est à noter que $E_\kappa^\ddagger(x,y)$ est, à y fixé, une fonction croissante de x. Ainsi on a

$$\psi_f(x,y) = F(1,y)j_\kappa(u)\big\{1 + O\big(\lambda_\kappa(u)E_\kappa^\ddagger(x,y)\big)\big\}$$

uniformément pour $f \in \mathcal{M}_\kappa^*(A;R)$, $y \geqslant 2$ et $\sqrt{y} \leqslant x \leqslant Y_\varepsilon^*$. Cela équivaut au résultat annoncé. □

11·2. Extension au cas général

Maintenant considérons une fonction quelconque $f \in \mathcal{M}_\kappa(A,C,\eta;R)$. On peut écrire $f = f^* * g$ avec $f^* \in \mathcal{M}_\kappa^*(A;R)$, et

$$g(p^\nu) := \sum_{j+k=\nu} (-1)^j f(p^k) f(p)^j/j! \qquad (p \geqslant 2, \nu \geqslant 1).$$

Posons $z := \max\{x/y,\ \sqrt{y}\}$, $u_m := (\log m)/\log y$ $(m \geqslant 1)$ et

$$F^*(s,y) := \sum_{P(n)\leqslant y} f^*(n)/n^s.$$

En appliquant le Lemme 11.4 à f^*,[(4)] nous obtenons

$$\begin{aligned} \psi_f^*(x,y) &= \sum_{\substack{m\leqslant x\\ P(m)\leqslant y}} \frac{g(m)}{m}\psi_{f^*}^*\left(\frac{x}{m},y\right) + F^*(1,y)\sum_{\substack{m>x\\ P(m)\leqslant y}}\frac{g(m)}{m} \\ &= F^*(1,y)\big\{\Upsilon_1 + O\big(E_\kappa^\ddagger(x,y)\Upsilon_1 + \Upsilon_2\big)\big\}, \end{aligned} \tag{11·6}$$

avec

$$\begin{aligned} \Upsilon_1 &:= \sum_{\substack{m\leqslant z\\ P(m)\leqslant y}} \frac{g(m)}{m}\lambda_\kappa(u-u_m), \\ \Upsilon_2 &:= \sum_{\substack{m>z\\ P(m)\leqslant y}} \frac{|g(m)|}{m}, \end{aligned} \tag{11·7}$$

où nous avons employé l'estimation triviale $\psi_{f^*}^*(x/m,y) \leqslant F^*(1,y)$ pour $z < m \leqslant x$.

---

4. La formule (11·4) est bien applicable pour évaluer $\psi_{f^*}(x/m,y)$ puisque $m \leqslant z$ implique $\log(x/m)/\log y \geqslant \frac{1}{2}$.

Posons

$$\delta_\kappa(u,u_m) := \lambda_\kappa(u) - \lambda_\kappa(u-u_m) = \int_0^{u_m} \varrho_\kappa(u-v)\,\mathrm{d}v.$$

Il résulte aisément de (2·7) que

$$\delta_\kappa(u,u_m) \ll \begin{cases} \lambda_\kappa(u)\xi_\kappa(u)\dfrac{\log m}{\log y} & \text{si } u_m \leqslant 1/(2\xi_\kappa(u)), \\ \lambda_\kappa(u)m^{1-\alpha} & \text{si } u_m \leqslant u-\frac{1}{2}. \end{cases} \tag{11·8}$$

Nous majorons Υ_2 par la méthode de Rankin. Lorsque $x/y \geqslant \sqrt{y}$, nous avons grâce à (I·4·51)

$$\begin{aligned} \Upsilon_2 &\ll \sum_{\substack{m>x/y \\ P(m)\leqslant y}} \frac{|g(m)|}{m}\Big(\frac{x}{my}\Big)^{\alpha-1}\frac{\log m}{\log(x/y)} \\ &\ll \frac{\mathrm{e}^{-(u-1)\xi_\kappa(u)}}{(u-1)\log y}\sum_{P(m)\leqslant y}\frac{|g(m)|\log m}{m^\alpha} \\ &\ll \frac{\mathrm{e}^{-u\xi_\kappa(u)}\xi_\kappa(u)}{\log y}\Big(1+\frac{u^2\xi_\kappa(u)}{R(y^b)}\Big) \\ &\ll \lambda_\kappa(u)\frac{\xi_\kappa(u)}{\log y}\Big(1+\frac{u^2\xi_\kappa(u)}{R(y^b)}\Big). \end{aligned} \tag{11·9}$$

Similairement si $x/y < \sqrt{y}$, on a

$$\begin{aligned} \Upsilon_2 &\ll \sum_{\substack{m>\sqrt{y} \\ P(m)\leqslant y}} \frac{|g(m)|}{m}\Big(\frac{\sqrt{y}}{m}\Big)^{\alpha-1}\frac{\log m}{\log y} \\ &\ll \frac{y^{-(1-\alpha)/2}}{\log y}\sum_{P(m)\leqslant y}\frac{|g(m)|\log m}{m^\alpha} \\ &\ll \lambda_\kappa(u)\frac{\xi_\kappa(u)}{\log y}\Big(1+\frac{u^2\xi_\kappa(u)}{R(y^b)}\Big), \end{aligned} \tag{11·10}$$

puisque $x/y < \sqrt{y} \Rightarrow u \leqslant \frac{3}{2}$.

Il reste à évaluer le terme principal de (11·6). À cette fin, nous écrivons

$$\Upsilon_1 = \lambda_\kappa(u)\sum_{m\geqslant 1}\frac{g(m)}{m} + O(\lambda_\kappa(u)\Upsilon_2 + \Upsilon_3), \tag{11·11}$$

où Υ_2 est définie par (11·7) et

$$\Upsilon_3 := \sum_{\substack{m\leqslant z \\ P(m)\leqslant y}} \frac{|g(m)\delta_\kappa(u,u_m)|}{m}.$$

Posons $w := y^{1/(2\xi_\kappa(u))}$. D'après la première majoration de (11·8) et (I·4·51), nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{m\leqslant w\\ P(m)\leqslant y}}\frac{|g(m)|\delta_\kappa(u,u_m)|}{m} &\ll \lambda_\kappa(u)\frac{\xi_\kappa(u)}{\log y}\sum_{m\leqslant z}\frac{|g(m)|\log m}{m}\\ &\ll \lambda_\kappa(u)\frac{\xi_\kappa(u)}{\log y}\bigg(1+\frac{u^2\xi_\kappa(u)}{R(y^b)}\bigg).\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $1 \leqslant \log m/\log w$, la seconde estimation de (11·8) et (I·4·51), nous obtenons de plus que

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{w<m\leqslant z\\ P(m)\leqslant y}}\frac{|g(m)\delta_\kappa(u,u_m)|}{m} &\ll \frac{\lambda_\kappa(u)}{\log w}\sum_{P(m)\leqslant y}\frac{|g(m)|\log m}{m^\alpha}\\ &\ll \lambda_\kappa(u)\frac{\xi_\kappa(u)}{\log y}\bigg(1+\frac{u^2\xi_\kappa(u)}{R(y^b)}\bigg).\end{aligned}$$

En rassemblant ces estimations, nous déduisons que

$$\Upsilon_3 \ll \lambda_\kappa(u)\frac{\xi_\kappa(u)}{\log y}\bigg(1+\frac{u^2\xi_\kappa(u)}{R(y^b)}\bigg) \tag{11·12}$$

et finalement

$$\Upsilon_1 = \lambda_\kappa(u)\sum_{P(m)\leqslant y}\frac{g(m)}{m} + O\bigg(\lambda_\kappa(u)\frac{\xi_\kappa(u)}{\log y}\bigg(1+\frac{u^2\xi_\kappa(u)}{R(y^b)}\bigg)\bigg). \tag{11·13}$$

Maintenant le Théorème 3.3 découle donc de (11·6), (11·9), (11·10), (11·12), (11·13) et les faits que

$$F^*(1,y)\sum_{P(m)\leqslant y}\frac{g(m)}{m} = F(1,y), \qquad F^*(1,y) \asymp F(1,y).$$

Cela achève la démonstration. □

Bibliographie

[1] N.G. de Bruijn & J.H. van Lint, Incomplete sums of multiplicative fonction, I, II, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* **67** (1966), 339–347 ; 348–359.

[2] P. X. Gallagher, Sieving by prime powers, in : *Proceedings of the 1972 Number Theory Conference* (Univ. Colorado, Boulder, Colo., 1972), pp. 95–99. Univ. Colorado, Boulder, Colo., 1972.

[3] P. X. Gallagher, Sieving by prime powers, Collection of articles dedicated to Carl Ludwig Siegel on the occasion of his seventy-fifth birthday, V. *Acta Arith.* **24** (1973/74), 491–497.

[4] G. Greaves, *Sieves in number theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], **43**. Springer-Verlag, Berlin, 2001. xii+304 pp.

[5] G. Greaves, Incomplete sums of non-negative multiplicative functions, *Acta Arith.*, **118** (2005), n° 4, 337–357.

[6] D. Hensley, The convolution powers of the Dickman function, *J. London Math. Soc.* (2) **33** (1986), 395–406.

[7] H. Halberstam & H.-E. Richert, *Sieve methods*, London Mathematical Society Monographs, n° 4, Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London-New York, 1974. xiv+364 pp.

[8] G. Hanrot, G. Tenenbaum & J. Wu, Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables, 2, *Proc. London Math. Soc.*, à paraître.

[9] A. Hildebrand & G. Tenenbaum, On a class of difference differential equations arising in number theory, *J. d'Analyse* **61** (1993), 145–179.

[10] J. Johnsen, On the large sieve method in $GF(q,x)$, *Mathematika* **18** (1971), 172–184.

[11] Y. Motohashi, A note on the large sieve. III, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **55** (1979), no 3, 92–94.

[12] D. A. Rawsthorne, Selberg's sieve estimate with a one sided hypothesis, *Acta Arith.* **61** (1982), 282–289.

[13] A. Selberg, Remarks on multiplicative functions, in : *Number theory day* (Proc. Conf., Rockefeller Univ., New York, 1976), pp. 232–241. Lecture Notes in Math., Vol. 626, Springer, Berlin, 1977.

[14] H. Smida, Sur les puissances de convolution de la fonction de Dickman, *Acta Arith.* **59**, n° 2 (1991), 124–143.

[15] J. M. Song, Sums of nonnegative multiplicative functions over integers free of large prime factors I, *Acta Arith.*, **97**, 4 (2001), 329–351.

[16] G. Tenenbaum, Sur une question d'Erdős et Schinzel, in : *A tribute to Paul Erdős*, 405–443, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[17] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours spécialisés, n° 1, Société Mathématique de France (1995), xv + 457 pp.

[18] G. Tenenbaum, Note on a paper by Joung Min Song, *Acta Arith.* **97**, 4 (2001), 353–360.

[19] G. Tenenbaum & J. Wu, Moyennes de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables, *J. reine angew. Math.* **564** (2003), 119–166.

Institut Élie Cartan, UMR 7502
Université Henri Poincaré–Nancy 1
BP 239
54506 Vandœuvre-lès-Nancy
France

gerald.tenenbaum@iecn.u-nancy.fr
wujie@iecn.u-nancy.fr